数学分析（B1）习题课讲义

第 1 次

胡洁洋

分析是极限的艺术。

作业解答

作业 1. (习题 1.1.1) 由 a 有理数, 设 $a = p/q$, p, q 为互质整数. 若 $a+b$ 有理数, 设 $a+b = u/v$, 则

$$b = \frac{u}{v} - \frac{p}{q} = \frac{uq - vp}{vq} \in \mathbb{Q},$$

矛盾; 因 b 无理数, $-b$ 也是, 由前所证, $a-b$ 也是无理数. 类似可证 ab, b/a 无理数.

作业 2. (习题 1.1.2) 任取 $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, 考虑

$$x_0 = \frac{x_1 + (\sqrt{2}-1)x_2}{\sqrt{2}},$$

我们证明: 1) $x_1 < x_0 < x_2$; 2) x_0 为无理数.

1):

$$x_0 - x_1 = (\sqrt{2}-1)(x_2 - x_0) = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1) > 0$$

2): 假设 x_0 是有理数, 则由习题 1.1,

$$x_0 - x_2 = \frac{\sqrt{2}(x_1 - x_2)}{2},$$

左边是有理数, 但右边是无理数 ($\sqrt{2}$ 无理数, 乘有理数 $(x_1 - x_2)/2$ 还是无理数), 矛盾.

注. 构造来自高中解析几何常见的定比分点坐标公式, 要证明存在性, 最简单的方式就是直接构造一个合乎题意的解, $\sqrt{2}$ 换成任意正无理数都可以.

作业 3. (习题 1.1.3) $\sqrt{2}$ 无理性课上已经讲过. $\sqrt{3}$ 也是类似: 假设其为有理数, 设 $\sqrt{3} = p/q$, p, q 为互质正整数, 那么由

$$p^2 = 3q^2,$$

$3 \mid p$, 设 $p = 3r$, 则 $q^2 = 3r^2$, 于是 $3 \mid q$, 进而 $(p,q) \geq 3 \neq 1$, 矛盾.

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$: 假设其为有理数, 则 $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ 也是有理数, 于是

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - (\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]$$

是有理数, 这不可能.

作业 4. (习题 1.1.6) 对 n 归纳. $n=1$, 是恒等式. 对 $n-1 (n \geq 2)$, 假设命题成立, 现在来看 n. 当 $a_1 + \cdots + a_n \leq -1$, 左边 $\geq 0 \geq$ 右边, 结论已经成立; 当 $a_1+\cdots+a_n > -1$, 由归纳假设,

$$\begin{aligned}(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) &\geq (a_1+\cdots+a_{n-1}+1)(a_n+1)\\ &= 1+a_1+a_2+\cdots+a_n+(a_1+\cdots+a_{n-1})a_n\\ &\geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

最后是因为 $a_1+\cdots+a_{n-1}, a_n > -1$ 且二者同号.

注. 很多同学没有分类 $a_1+\cdots+a_n$ 和 -1 的大小关系而是直接用了 $n=2$ 的归纳假设, 这是不对的, 因为不满足 $n=2$ 时候的条件, 所有数 ≥ -1. 一种修补的方案如上, 分类讨论; 另一种方式是用了 $n-1$ 的归纳假设后, 直接计算

$$\geq (a_1+\cdots+a_{n-1}+1)(a_n+1) = 1+\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_n \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

作业 5. (习题 1.2.1)

(2) 任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n > N$, 则

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由定义知结论成立.

(4) 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 对任意 $n > N$,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由定义知结论成立.

注. 学好数学分析, 既需抓住问题的主干, 又得会处理问题的细节. 既需懂得分析函数的大致走势, 又要会研究函数的局部性质. 要得到合适的量级, 要大胆放缩: 知道哪里是主要部分, 不要动, 把次要的部分放大或缩小, 不改变太多整体的大小就可以了, 比如

这里直接将三角函数大小放成 1, 以及直接把 $n!$ 大于 2 的项全放成 n, 因为我们有一个信念: 放缩完之后得到的东西还是比下面好很多. 如果太考虑细枝末节, 反而会考虑麻烦. 在后面, 我们要研究 $n!$ 更精细的渐近性态, 会得到以下结果 (Stirling 公式):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n} = 1,$$

也可以写成

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \qquad 当\ n \to \infty,$$

这时就需要我们仔细分析 $n!$ 每一项的大小, 不能鲁莽.

作业 6. (习题 1.2.2) 由题意, 任给正数 ε/M, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < M\varepsilon/M = \varepsilon$, 由定义知结论成立.

作业 7. (习题 1.2.3) 由题意, 任意正数 ε, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 也就是说, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

作业 8. (习题 1.2.4) 由绝对值不等式, $0 \le ||a_n| - |a|| \le |a_n - a|$, 根据夹逼原理, 也有 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$. 反例: $a_n = (-1)^n$. 但若 $a = 0$, 实际上由极限定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得任意 $n > N$, $||a_n|| = |a_n| < \varepsilon$, 也就是说,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

作业 9. (习题 1.2.6)

对任意 $\varepsilon > 0$, 由定义, 存在正整数 N_1, 使得任意 $n > N_1$, $|a_{2n} - a| < \varepsilon$, 存在正整数 N_2, 使得任意 $n > N_2$, $|a_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是, 我们取 $N = \max\{2N_1 + 2, 2N_2 + 2\}$, 任意 $n > N$, 如果 n 为奇数, 则 $(n-1)/2 > N_2$, 于是 $|a_n - a| < \varepsilon$; 同样若 n 为偶数也有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 也就是说不管怎样, 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 由定义知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

作业 10. (习题 1.2.7(1)) 注意对任意正整数 n, $|a_n - a_{n+1}| = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n+2} > 1$, 与 Cauchy 收敛准则矛盾.

注. 证明数列不收敛大致方法: 1. 定义 2. 证明不满足 Cauchy 收敛准则 3. 找到两个收敛到不同极限的子列

作业 11. (习题 1.2.8)

(1) 注意

$$\lim_{n\to\infty} 4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}=4, \quad \lim_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}=3,$$

由极限除法运算,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{3}.$$

(4) 先化简 a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2 3^2\cdots n^2} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)\cdot(n+1)}{2^2 3^2\cdots n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n}, \end{aligned}$$

于是其极限为 $\frac{1}{2}$.

作业 12. (习题 1.2.13) 问题一: 由极限定义, 取 $\varepsilon=(a-b)/2$, 则存在正整数 N_1, N_2, 使得对任意 $n>N_1$, $|a_n-a|<(a-b)/2$, 对任意 $n>N_2$, $|b_n-b|<(a-b)/2$. 那么从项 $\max\{N_1,N_2\}+1$ 开始, $a_n>a-(a-b)/2=b+(a-b)/2>b_n$.

问题二就是问题一的逆否 (改变一下 a,b 的顺序), 从逻辑上说, 它们是等价的.

作业 13. (习题 1.2.14) 不妨 $a\geq b$. 当 $a>b$ 时, 由 13 题, 从某项开始, $a_n>b_n$, 故从某项开始, $c_n=a_n$, $d_n=b_n$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a, \quad \lim_{n\to\infty} d_n=b.$$

当 $a=b$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N_1,N_2, 使得对任意 $n>N_1$, $|a_n-a|<\varepsilon$, 对任意 $n>N_2$, $|b_n-a|<\varepsilon$, 所以当 $n>N\coloneqq\max\{N_1,N_2\}$ 时, $|c_n-a|<\varepsilon$, $|d_n-a|<\varepsilon$, 于是结论也成立.

作业 14. (习题 1.2.15)

(1) 注意

$$0<\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)<n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0, \quad \text{as } n\to\infty,$$

由夹逼原理得极限为 0.

(2) 注意

$$0<(n+1)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]\leq n^k\cdot\frac{k}{n}=kn^{k-1}\to 0,$$

由夹逼原理得极限为 0.

(3) 注意

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{1-\frac{1}{2^n}}\to 2,\quad \text{as } n\to\infty.$$

(4) 注意当 $n\geq 2$ 时,

$$1\leq\sqrt[n]{n^2-n+2}\leq\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2\to 1,$$

由夹逼原理得极限为 1.

(5) 由

$$\sqrt[n]{\cos^2 1}\leq\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}<\sqrt[n]{n},$$

左右极限都是 1, 于是极限为 1.

作业 15. (习题 1.2.16) 不妨 $a_1=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$. 由

$$a_1=\sqrt[n]{a_1^n}\leq\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}\leq\sqrt[n]{ma_1^n}=a_1\sqrt[n]{m}\to a_1,$$

结论成立.

补充

书写规范

改第一次作业时碰到不少书写问题. 通常以数学符号算式为核心, 适量辅以文字说明 (但尽量不要没有); 规范归纳法、反证法的书写格式; 尽量避免 $\because,\therefore$ 符号, 数学论文更提倡用“因为/所以/因此/于是/从而/由此得/故”“since/thus/hence/therefore”等文字衔接, 而不是符号缩写. 读者理解更顺畅. 请同学们多模仿教材上证明的书写过程, 慢慢地成为自己的习惯.

有时候, 适当拆除自己思路的脚手架, 反而能让过程更加清晰. 以用定义证明数列极限为例, 很多同学给定了 $\varepsilon>0$, 想写取 N 的过程, 实际上可以把这些写在草稿纸 (熟练后可不写) 上, 在写正式解答的时候直接写出取得的 $N(\varepsilon)$ 值, 然后后面再进行放缩, 进行说理, 为什么取出来的 N 是合理的. 我们具体举一个简单的例子.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

书写反例 1:

$$\forall\varepsilon>0,\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$$

所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$. 由极限定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

书写反例 2: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 对任意 $n > N$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| < \varepsilon$, 由极限定义, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

书写示例: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 对任意 $n > N$,

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon,$$

由极限定义, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

附 1: 数学归纳法的书写格式

对于未熟练掌握此法者, 最好根据模版来写. 以下假设要证明一个关于 $n(n \geq 1)$ 的命题成立, 当然实际情况可能并不一定从 $n = 1$ 出发, 那就从不同的起点奠基即可. 这里仅介绍第一和第二数学归纳法, 螺旋、反向归纳法不作介绍, 感兴趣者可自己搜索.

第一数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 命题成立; 对 $n(n \geq 1)$, 假设命题成立; 下面考虑 $n+1$ 的情形.

$\cdots$, 于是, 对 $n+1$, 命题也成立, 由归纳法原理, 结论得证.

第二数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 命题成立; 对小于 $n(n \geq 2)$ 的情况, 假设命题成立; 下面考虑 n 的情形.

$\cdots$, 于是, 对 $n+1$, 命题也成立, 由归纳法原理, 结论得证.

实际上, 很多时候可以无脑用第二数学归纳法, 因为其包含了第一归纳法的假设.

附 2: 一些记号

常用 $\coloneqq$ 表示“被定义为”, 用来定义新的变量、函数等, 例如:

$$f(x) \coloneqq x^2 + 1, \qquad a_n \coloneqq \frac{1}{n^\alpha}.$$

记两个集合的*无交并*为 $\sqcup$: 主要用于强调两个集合没有交集, 例如

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \sqcup \mathbb{Q}^c,$$

如果是很多集合, 也可用

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$$

表示一族集合的无交并, 类似

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

的记号也是合理的.

记有限或按指标集合的乘积为 $\prod$:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k, \qquad \prod_{i \in I} x_i.$$

常约定空乘积等于 1:

$$\prod_{\emptyset} (\cdot) = 1.$$

记集合 $\{1, 2, \cdots, n\} \coloneqq [n]$, 尤其常用于组合学.

恒等 (对自变量域内处处相等) 常记为

$$f \equiv g,$$

当然这个符号也用来表达同余.

为表示数集, 如 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 通常不用一般的字体, 而是采用黑板粗体表示, 否则比如在写极限定义证明题, 会出现如: $N \in N$ 这种混淆. 在纸笔书写中, 用"加一条短的平行竖线"来模拟黑板粗体, 如图 1.

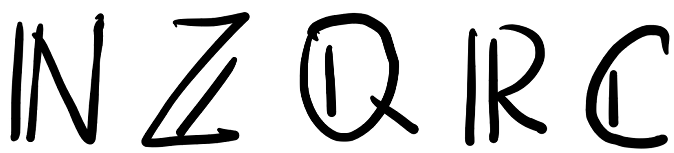

图 1: 常用数集符号的书写示意

补充题

例 0.1 (e 的无理性)**.** 证明: e 是无理数.

证明. 上课已经指出

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \coloneqq \lim_{n \to \infty} a_n,$$

假设 $\mathrm{e}=\dfrac{p}{q}$, p,q 是互质正整数, 上课已经指出 $2<\mathrm{e}<3$, 所以 $q\geq 2$. 则当 $n>q$,

$$\begin{aligned}
a_n-a_q&=\frac{1}{(q+1)!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\
&\leq\frac{1}{(q+1)!}\left(1+\frac{1}{q+2}+\cdots+\frac{1}{(q+2)^{n-q-1}}\right)\\
&<\frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-1/(q+2)}\\
&=\frac{q+2}{(q+1)!(q+1)}\\
&<\frac{1}{q!q}(\text{用到}q(q+2)<(q+1)^2),
\end{aligned}$$

又 $\mathrm{e}=p/q$, 得 $q!\mathrm{e}-q!a_q$ 都是整数, 于是 $q!\mathrm{e}-q!a_q\geq 1$, 由

$$q!\mathrm{e}-q!a_q=\lim_{n\to\infty}q!(a_n-a_q)\leq\lim_{n\to\infty}q!\cdot\frac{1}{q!q}\leq\frac{1}{2},$$

矛盾. □

注. 这个例题告诉我们 e 是无理数, 实际上, π 也是无理数. 判定一个数的无理性是比较困难的, 有同学在作业中由于 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 是无理数, 就认为它们的和一定是无理数, 但这不一定对, 比如 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$ 就是有理数. 另外, 人们到现在还不知道 $\mathrm{e}+\pi$ 是不是无理数.

例 0.2 (压缩映射定理)**.** 设函数 $f:\ [a,b]\to[a,b]$, 且存在常数 $L\in(0,1)$ 使对任意 $x,y\in[a,b]$ 都有

$$|f(x)-f(y)|\leq L\,|x-y|,$$

(该条件称为 Lipschitz 条件), 则 f 有且仅有一个不动点 $x^*\in[a,b]$, 即 $f(x^*)=x^*$.

证明. **存在性.** 任取 $x_0\in[a,b]$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)$. 由 $f([a,b])\subset[a,b]$, 得 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 于是定义良好, 接下来我们证明: $\{x_n\}$ 极限存在, 只需证明它是 Cauchy 列. 注意到

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leq L|x_n-x_{n-1}|\leq\cdots\leq L^n|x_1-x_0|$$

因此对 $m>n$,

$$|x_m-x_n|\leq\sum_{k=n}^{m-1}|x_{k+1}-x_k|\leq|x_1-x_0|\sum_{k=n}^{\infty}L^k=\frac{L^n}{1-L}\,|x_1-x_0|\leq\frac{b-a}{1-L}L^n.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{1,\left[\log_L\frac{(1-L)\varepsilon}{b-a}\right]+1\}$, 则任意 $m,n>N$, $|x_m-x_n|<\varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是收敛. 记极限为 x^*, 下证 $f(x^*)=x^*$. 由 Lipschitz 条件, f 连

续 (留给同学们), 于是

$$f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

唯一性. 反证法. 假设存在 $x^* \neq x^{**}$ 都是不动点, 则

$$|f(x^*) - f(x^{**})| = |x^* - x^{**}|,$$

矛盾, 综上, 不动点唯一. □

例 0.3. 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 证明: 它有单调子列.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 若存在无穷多项 $x_n = x_0$, 结论已成立; 否则由抽屉原理, 集合 $A := \{n : x_n > x_0\}$, $B := \{n : x_n < x_0\}$ 至少有一个有无穷多项, 不妨是 A. 先证明: 任意 $\varepsilon > 0$,

$$\#([x_0, x_0 + \varepsilon] \cap A) = \infty.$$

由题意, 若此结论不成立, 则存在 N_1, 使得任意 $n > N_1$, $n \in A$, $x_n > x_0 + \varepsilon$. 但由极限定义, 存在 N, 任意 $n > N$, $|x_n - x_0| < \varepsilon$, 所以 $A \subset [\max\{N, N_1\}]$, 必有限, 矛盾.

回原题, 递归取以下子列: $x_{k_1} \in A$ 任取, $x_{k_{n+1}} \in [x_0, \frac{x_{n_k}+x_0}{2}] \cap A$, 前面已证总可以这么取. □

介绍: 上下极限

好多同学在没证明极限的良定性时就直接写表达式 $\lim_{n\to\infty} x_n = \cdots$ 这种式子, 是不可以的. 为了解决极限不一定存在的问题, 我们可以用上下极限来规避极限不一定存在的问题. 它的出发点是来自 (老师似乎讲过的) 极限存在的这样一个等价命题 (子列判别法):

数列 $\{x_n\}$ 极限存在等价于其任意子列收敛到同一极限.

当然这个命题的使用通常是去证明某个极限不存在: 只需找到两个收敛到不同极限的子列. 那么我们现在思考: 如果我们记 $\overline{x}$ 为 $\{x_n\}$ 所有收敛子列或发散到无穷的极限的上确界, $\underline{x}$ 为为 $\{x_n\}$ 所有收敛子列或发散到无穷的极限的下确界, 根据确界存在原理, $\overline{x}$, $\underline{x}$ 一定存在, 所以, 极限存在就等价于 $\overline{x} = \underline{x}$, 这给了我们定义以下上下极限的灵感.

设实数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 给定. 记尾部上确界与下确界序列:

$$s_n := \sup_{k\geq n} x_k, \qquad i_n := \inf_{k\geq n} x_k.$$

定义 0.4 (上下极限)**.** 称

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\ge1} \sup_{k\ge n} x_k, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n := \lim_{n\to\infty} i_n = \sup_{n\ge1} \inf_{k\ge n} x_k.$$

它们总存在于扩展实数 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. 记

$$\overline{x} := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n, \qquad \underline{x} := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

命题 0.5 (基本性质)**.** *对任意实数列 (x_n), 有:*

(a) *(s_n) 单调不增且有下界, 因此 $\lim s_n$ 存在于 $\overline{\mathbb{R}}$. 同理 (i_n) 单调不减且有上界, 因此 $\lim i_n$ 存在于 $\overline{\mathbb{R}}$.*

(b) *总有 $\underline{x} \le \overline{x}$.*

(c) *x_n 收敛当且仅当 $\underline{x} = \overline{x} = L$, 此时 $\lim x_n = L$.*

(d) *若 $\overline{x} < +\infty$, 则对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $x_n \le \overline{x} + \varepsilon$ 对所有 $n \ge N$ 成立. 若 $\underline{x} > -\infty$, 则对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N 使得 $x_n \ge \underline{x} - \varepsilon$ 对所有 $n \ge N$ 成立.*

证明. (1) 由定义可见 $s_{n+1} = \sup_{k\ge n+1} x_k \le \sup_{k\ge n} x_k = s_n$, 故单调不增. 下界由例如 $\inf_{k\ge1} x_k$ 保证. (i_n) 类似.
(2) 由 $i_n \le s_n$ 对所有 n 成立, 取极限得 $\underline{x} \le \overline{x}$.
(3) 若 $x_n \to L$, 则 $s_n \downarrow L$ 与 $i_n \uparrow L$, 故上下极限同为 L. 反过来若 $\underline{x} = \overline{x} = L$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2 使 $i_n > L - \varepsilon$ 与 $s_n < L + \varepsilon$ 对 $n \ge N := \max\{N_1, N_2\}$ 成立, 从而 $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ 对 $n \ge N$ 成立, 即 $x_n \to L$.
(4) 由 $s_n \downarrow \overline{x}$ 得存在 N 使 $s_n < \overline{x} + \varepsilon$, 于是对 $k \ge n$ 有 $x_k \le s_n < \overline{x} + \varepsilon$. 另一端类似. □

定理 0.6 (用极限点刻画)**.** *设 E 为 (x_n) 的聚点集合, 即存在子列收敛到 y 的所有极限 y. 则*

$$\overline{x} = \sup E, \qquad \underline{x} = \inf E.$$

并且存在子列 $x_{n_j} \to \overline{x}$ 与子列 $x_{m_j} \to \underline{x}$.

注 (常用判定技巧). 当直接判断 $\lim x_n$ 困难时, 可先估计 $\overline{\lim}$ 与 $\underline{\lim}$. 若能分别夹住到同一极限 L, 则得到收敛结论. 而且关键的一点是: 数列的极限不一定存在, 但是数列的上下极限必定存在.

例 0.7. 设 $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -1.$$

说明: 偶数项 $1+\frac{1}{n}\downarrow 1$, 奇数项 $-1-\frac{1}{n}\uparrow -1$. 因此尾部上确界趋于 1, 尾部下确界趋于 -1.

例 0.8 ($\sin n$ 的上下极限)**.** 设 $x_n=\sin n$. 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

说明: 因为 $1/(2\pi)$ 为无理数, 序列 $\{n \bmod 2\pi\}$ 在 $[0,2\pi)$ 稠密. 因此可取子列 $n_k\to\infty$ 使 $n_k\to\frac{\pi}{2}$ 与 $n_k\to\frac{3\pi}{2}$ (模 2π) 分别成立, 于是 $\sin n_k\to 1$ 与 $\sin n_k\to -1$. 结合极限点刻画定理得结论.

对于函数, 我们同样可定义上下极限:

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{0<|x-x_0|<\delta} f(x), \quad \varliminf_{x\to x_0} f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x),$$

且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = s \Leftrightarrow \varlimsup_{x\to x_0} f(x) = \varliminf_{x\to x_0} f(x) = s.$$

一些上课没有证明的命题

命题 0.9. 记

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha},$$

当 $0<\alpha\le 1$ 时, $\{a_n\}$ 发散到正无穷, 当 $\alpha>1$ 时, $\{a_n\}$ 收敛. 如果用无穷求和的记号, 也就是说,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} =\infty, & 0<\alpha\le 1, \\ <\infty, & \alpha>1. \end{cases}$$

证明. 数列 $\{a_n\}$ 严格递增.

发散情形 $0<\alpha\le 1$**.** 分组放缩. 由

$$a_{2^m} = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\sum_{j=2}^{m}\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k^\alpha} \ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m} 2^{j(1-\alpha)} \ge \frac{m+1}{2},$$

因而 $a_{2^m}\to\infty$, 由单调性得 $a_n\to\infty$.

收敛情形 $\alpha>1$**.** 仍按同样的分组, 但此时用上界

$$\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k^\alpha} \le 2^{j-1}\cdot\frac{1}{(2^{j-1})^\alpha} = 2^{-(j-1)(\alpha-1)}.$$

因而

$$\sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k^\alpha}=1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k^\alpha}\le 1+\sum_{j=1}^{m}2^{-(j-1)(\alpha-1)}=1+\frac{1-2^{-m(\alpha-1)}}{1-2^{-\alpha+1}}<\frac{2-2^{-\alpha+1}}{1-2^{-\alpha+1}},$$

也就是对任意正整数 m, $a_m<a_{2^m}<\dfrac{2-2^{-\alpha+1}}{1-2^{-\alpha+1}}$, 由单调收敛定理得 $\{a_n\}$ 收敛. □

注. Euler 得到了

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

定理 0.10 (∞/∞ 型 Stolz 定理). 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 ∞. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

这里 $A\in[-\infty,\infty]$.

证明. 无从下手时, 先用定义翻译条件. 当 $A\in\mathbb{R}$ 时, 由定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 任意 $n>N$,

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon,$$

即

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n),$$

作累加, 得

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N+1})<a_n-a_{N+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N+1}),$$

当 n 充分大时, $b_n>0$, 三式同除 b_n, 得

$$\frac{a_{N+1}-Ab_{N+1}}{b_n}-\varepsilon\left(1-\frac{b_{N+1}}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-A<\frac{a_{N+1}-Ab_{N+1}}{b_n}+\varepsilon\left(1-\frac{b_{N+1}}{b_n}\right).$$

注意到 a_{N+1}, b_{N+1}, 都是关于 ε 的常数, 取 $n\to\infty$, 得

$$-\varepsilon\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A\le\varepsilon.$$

又注意到 ε 的任意性, 得

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A=0,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$
当 $A=+\infty(-\infty$ 类似), 任意 $M>0$，存在 N 使得对所有 $n\geq N$，
$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>M.$$
因 $\{b_n\}$ 严格递增，$b_{n+1}-b_n>0$，于是
$$a_{n+1}-a_n>M\,(b_{n+1}-b_n).$$
将上式对 $k=N,\ldots,n-1$ 累加，得对一切 $n>N$，
$$a_n-a_N>M\,(b_n-b_N).$$
当 n 充分大时有 $b_n>0$，两边同除以 b_n，得到
$$\frac{a_n}{b_n}>M\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)+\frac{a_N}{b_n}.$$
令 $n\to\infty$，由 $b_n\to\infty$ 可得
$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\ \geq\ M.$$
由于 $M>0$ 任意，故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$
□

注. 这里我们使用了分析学极其常见的技巧: epsilon-room. 其精神是: 要证明 $A=B$, 只需证明对任意 $\varepsilon>0$, $A\geq B-\varepsilon$, $A<B+\varepsilon$. 也就是说, 分析学的所有等式都是不等式. 留出一个 ε 的大小, 退一步海阔天空. 0/0 情形请同学们自己完成.

定理 1.28-30

定理 0.11. *若当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极限 l, 则:*

1° *极限是唯一的.*

2° *$f(x)$ 在 x_0 的附近有界, 即存在正数 M,δ, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leq M$.*

3° *若 $a<l<b$, 则在 x_0 的附近, 有 $a<f(x)<b$, 即存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $a<f(x)<b$.*

证明. 1° 假设同时有 $l_1\neq l_2$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{3}|l_1-l_2|>0$. 由极限定义, 当 x 充分靠近 x_0 时, 同时有 $|f(x)-l_1|<\varepsilon$ 与 $|f(x)-l_2|<\varepsilon$, 则 $|l_1-l_2|\leq|l_1-f(x)|+|f(x)-l_2|<2\varepsilon=\frac{2}{3}|l_1-l_2|$,

矛盾.

2° 取 $\varepsilon=1$. 则存在 $\delta>0$ 使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-l|<1$. 于是 $|f(x)|\le|l|+1$. 取 $M=|l|+1$ 即得.

3° 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{b-l,l-a\}>0$. 若 $|f(x)-l|<\varepsilon$, 则 $l-\varepsilon>a$ 与 $l+\varepsilon<b$, 从而 $a<f(x)<b$. □

定理 0.12. *设当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别以 l 与 l' 为极限, 则:*

1° *若在 x_0 的附近有 $f(x)>g(x)$, 则 $l\ge l'$.*

2° *若 $l>l'$, 则在 x_0 的附近必有 $f(x)>g(x)$.*

3° *由 1° 与 2° 推出: 若在 x_0 的附近有 $f(x)\ge0$, 则 $l\ge0$; 若 $l>0$, 则在 x_0 的附近有 $f(x)>0$.*

证明. 设 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $h(x)\to l-l'$. (用到 1.30, 不过 1.30 不依赖于 1.29)

1° 若在 x_0 的附近 $h(x)>0$, 而又假设 $l-l'<0$, 取 $\varepsilon=-(l-l')/2>0$, 则充分靠近 x_0 时 $h(x)<(l-l')+\varepsilon=(l-l')/2<0$, 矛盾. 故 $l-l'\ge0$, 即 $l\ge l'$.

2° 取 $\varepsilon=\frac{1}{3}(l-l')>0$. 充分靠近 x_0 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 与 $|g(x)-l'|<\varepsilon$. 于是 $f(x)\ge l-\varepsilon>l'+\varepsilon\ge g(x)$, 从而 $f(x)>g(x)$.

3° 令 $g\equiv0$ 即得. □

定理 0.13. *设当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有极限, 则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0$ 时) 均有极限, 且*

1° $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\Big(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Big)\Big(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Big)$; *特别地, $\lim\limits_{x\to x_0}c\,f(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, 其中 c 为常数.*

3° $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, *其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0$.*

证明. 设 $\lim f=l$, $\lim g=l'$.

1° 由三角不等式, $\big|[f(x)\pm g(x)]-(l\pm l')\big|\le|f(x)-l|+|g(x)-l'|$, 右端可同时小于任意给定 $\varepsilon>0$.

2° 先用定理 1.28 的 2° 得 f,g 在 x_0 的附近有界, 取界为 $|f(x)|\le|l|+1$, $|g(x)|\le|l'|+1$. 则

$$
\begin{aligned}
|f(x)g(x)-ll'|=|f(x)g(x)-lg(x)+lg(x)-ll'|&\le|f(x)-l|\,|g(x)|+|l|\,|g(x)-l'|\\
&\le(|l'|+1)\,|f(x)-l|+|l|\,|g(x)-l'|,
\end{aligned}
$$

右端随 $x \to x_0$ 而趋于 0. 常数倍的情形取 $g \equiv c$ 即可.

3° 先证 $g(x) \neq 0$ 在 x_0 的附近成立并且 $1/g(x) \to 1/l'$. 由于 $l' \neq 0$, 取 $0 < \eta < |l'|$, 则充分靠近 x_0 时 $|g(x) - l'| < \eta$, 从而 $|g(x)| \geq |l'| - \eta > \frac{1}{2}|l'|$. 于是

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|g(x) - l'|}{|g(x)|\,|l'|} \leq \frac{2}{|l'|^2}\,|g(x) - l'| \to 0.$$

由 $f \cdot (1/g) \to l \cdot (1/l')$ 与 2° 即得. □

注. 由此可见, 数列极限和函数极限的证明几乎是差不多的, 就是离散和连续版本的不同罢了. 从函数的极限的邻域定义可能会觉得还是有一些差别, 但我们还知道一个极限的等价定义 (Heine 判别法): 设 $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff$ 对任意数列 $\{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$, 若 $x_n \to x_0$, 则 $f(x_n) \to a$. 这个定义可能就更能彰显数列与函数极限之联系. 后面, 当我们要证明一些积分不等式, 会发现很多积分不等式也就是离散不等式的推广, 证明方法也是几乎一致的. 有时如果连续的问题找不到思路, 可以试试想一想离散版本的问题应该怎么做, 再把方法推广到连续.

数学分析（B1）作业解答

第二次

胡洁洋

作业 1. (习题 1.2.17)

(2) 由 $\{a_n\}$ 严增, 只需证明 $\{a_n\}$ 有上界. 由

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\frac{1-(1/3)^n}{1-1/3} < \frac{1}{2},$$

及单调收敛定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

(4) 由

$$|a_{n+p}-a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1},$$

当 $n \to \infty$, $\frac{1}{n+1} \to 0$, 于是 $\sup_{p\ge 0} |a_{n+p}-a_n| \to 0$, 由 Cauchy 收敛准则, $\{a_n\}$ 收敛.

注. 这里 A, B 是根据待定系数法确定的.

作业 2. (习题 1.2.18)

(1) 记 $b_n = n$, $c_n = c^n$, 由 $\{c_n\}$ 严增趋于 ∞,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(c-1)c^n} = 0,$$

由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0.$$

(3) 由均值不等式, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right) \ge \sqrt{a_n \cdot \dfrac{a}{a_n}}$, 得 $a_n \ge \sqrt{a}$, 当 $n \ge 1$.

再由 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{a-a_n^2}{a_n}$, 当 $n \ge 1$, 数列 $\{a_n\}_{n\ge 1}$递减, 且大于 $\sqrt{a}$, 由单调收敛定理知 $\{a_n\}$ 收敛到极限 $b \ge \sqrt{a}$, 下证 $b = \sqrt{a}$. 对递推式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$ 左右取极限, 知

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right),$$

解得 $b = \sqrt{a}$, 于是 $\{a_n\}$ 收敛到极限 $\sqrt{a}$.

(5) 递推式 $a_{n+1} = \sin a_n$, 先归纳证明 $0 < a_{n+1} < a_n < \pi/2$.

对 $n=1$, 由 $0<1<\pi/2$, $0<a_2=\sin a_1<a_1<\pi/2$, 成立. 对 $n(n\geq 1)$, 假设成立, 来看 $n+1$. 由归纳假设, $a_{n+1}\in(0,\pi/2)$, 故 $0<a_{n+2}=\sin a_{n+1}<a_{n+1}<\pi/2$, 由归纳法原理知结论成立. 回原题, 我们有 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n>0$, 从而 a_n 收敛到极限 $0\leq a<1$. 在递推式两边取极限, 有

$$a=\sin a,$$

当 $a\neq 0$ 时, 式子不成立, 故 $a=0$.

作业 3. (习题 1.2.21) 由题意,

$$\frac{a_n}{b_n}\geq\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>0,$$

由单调收敛定理, 数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 故 $a_n=b_n\cdot\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

作业 4. (习题 1.2.22) 记数列 $b_n\coloneqq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则 $\{b_n\}$ 的任意子列均收敛到 e.

(1) $a_n=b_{2n+1}\to\mathrm{e}$, 当 $n\to\infty$.

(2) $a_n=\frac{1}{b_{n-3}}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^4\to\frac{1}{\mathrm{e}}$, 当 $n\to\infty$.

(3) $a_n=\frac{1}{b_{n+1}}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\to\frac{1}{\mathrm{e}}$, 当 $n\to\infty$.

(4) $a_n=b_{n^3}^2\to\mathrm{e}^2$, 当 $n\to\infty$.

作业 5. (习题 1.3.2)

(2) 在 1 的任意去心邻域内,

$$\frac{x^n-1}{x-1}\equiv x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1.$$

由极限四则运算, 及右边每项趋于 1 的极限均为 1, 故右边趋于 1 的极限为 n, 进而

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1=n.$$

(4) 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+6}{5x-1}=\frac{3}{5}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x-5}{5x-1}=\frac{8}{5}$, 及极限四则运算, 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+6}{5x-1}\right)^{70}\left(\frac{8x-5}{5x-1}\right)^{20}=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}.$$

作业 6. (习题 1.3.4)

对任意 $\varepsilon>0$, 存在正实数 M, 使得对任意 $x>M$, $|f(x)-l|<\varepsilon$. 对这个 M, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, $a_n>M$, 从而 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 由极限定义知

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=l,$$

特别地, 取 $a_n=n$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=l.$$

作业 7. (习题 1.3.7)

由 $y=\sin x$ 是奇函数, 只需证明 $\alpha\geq 0$ 情形. $\alpha=0$ 左右都是 0; 下考虑 $\alpha>0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $0<\delta<\pi/2$, 对任意 $x\in(0,\delta)$,

$$1-\varepsilon<\frac{\sin x}{x}<1 \iff (1-\varepsilon)\,x<\sin x<x,$$

于是, 当 $n>N:=\left[\dfrac{\alpha}{\delta}\right]+1$,

$$(1-\varepsilon)\,\frac{k\alpha}{n^2}<\sin\frac{k\alpha}{n^2}<\frac{k\alpha}{n^2}, 1\leq k\leq n.$$

对 k 从 1 到 n 求和,

$$(1-\varepsilon)\,\frac{n+1}{2n}\alpha<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}<\frac{n+1}{2n}\alpha,\ n>\left[\frac{\alpha}{\delta}\right]+1,$$

从而

$$0>\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}-\frac{(n+1)\alpha}{2n}>-\varepsilon\frac{n+1}{2n}\alpha\geq-\alpha\varepsilon,$$

即 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}-\frac{(n+1)\alpha}{2n}\right|<\alpha\varepsilon$, 任意 $n>N$. 由极限定义,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{k\alpha}{n^2}--\frac{(n+1)\alpha}{2n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}=0+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

注. 如果用上下极限 (见上次习题课), 这题的过程会好写很多, 不妨一试; 另外, 这道题也是 ε-room 思想的一次体现. 当然, 这题的其他方法也很多, 比如三角等差数列求和公式.

作业 8. (习题 1.3.8)

由定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 任意 $|x|>M$, $|f(x)-l|<\varepsilon$, 于是任意

$|x| < 1/M$, $x \neq 0$,

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - l \right| < \varepsilon.$$

由函数极限定义得证.

叙述: 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, 则 $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$; 若 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, 则 $\lim\limits_{x \to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 证明类似上面, 只不过把 $|x| > M$ 的绝对值去掉, 不做赘述.

注. 由此可见, 在分析里很多时候, ∞ 和 0 是等价的! 这点等同学们学习了复变函数, 会有更深刻的体会.

作业 9. (习题 1.3.14)

只证 $+\infty$ 情形. 在正方向无限远离原点时, 设曲线 C 与 l 在横坐标 x 处的点分别为 M, N, $MH \perp L$ 于 H, 则 $\dfrac{|MH|}{|ML|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, 于是,

$$L\text{为}f(x) \to +\infty\text{渐近线} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} |MH| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} |ML| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

"$\Rightarrow$": 若 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, 除以 x 知 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} - a = 0$.

"$\Leftarrow$": $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ 当然能推出 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

求渐近线方程:

(1) 先考虑水平、垂直渐近线. 由于

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty,$$

不存在水平渐近线; 当 $x \to -(1/\mathrm{e})^-$, $y(x) \to +\infty$, 所以 $x = -1/\mathrm{e}$ 是一条垂直渐近线.

再考虑斜渐近线. 由

$$\frac{y}{x} = \ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{x}\right) \to 1, \text{ as } x \to \infty,$$

及

$$y - x = x \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}x}\right) \sim x \cdot \frac{1}{\mathrm{e}x} = \frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ as } x \to \infty,$$

于是知斜渐近线为 $y = x + 1/\mathrm{e}$.

(2) 类似求得渐近线为: $x = 1$, $y = 3x + 1$.

作业 10. (习题 1.3.9)

(1) $\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} \sim \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$, $x \to 0$, 于是极限为 $\dfrac{2}{5}$.

(2) $\dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \dfrac{1 - x^2/2 - 1 + (3x)^2/2 + o(x^2)}{x^2} = 4 + o(1)$, $x \to 0$, 于是极限

为 4.

(3) 当 $x > 114514$, $0 < \dfrac{x+1}{2x-1} < 0.1919$, 于是此时 $0 < \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x < 0.1919^x \to 0$, 当 $x \to \infty$. 由夹逼定理, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0$.

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} \overset{t=(x^2-1)/2}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \mathrm{e}^2.$$

作业 11. (习题 1.3.12) 设 k 为正整数, 则

$$y\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 2k\pi+\frac{\pi}{2} \to +\infty,\ \text{as } k\to\infty; \qquad y\left(2k\pi\right) = 0,\ \text{as } k\to\infty,$$

由定义知函数在 $\mathbb{R}^+$ 无界但非无穷大量.

作业 12. (习题 1.3.13) 类似 1.3.12,

$$y\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = 2k\pi \to +\infty, \text{as } k\to\infty,$$

故无界, 又当 $x\to 0^+$ 时, 由

$$y\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

知并非无穷大量.

作业 13. (习题 1.3.18)

(3)

$$\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x} \sim \frac{\frac{\sin x}{n}}{x} \sim \frac{\frac{x}{n}}{x} = \frac{1}{n},\ \text{as } x\to 0.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8},\ \text{as } x\to 0.$$

(5)

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} \sim \frac{\frac{x+x^2}{2}}{2x} \to \frac{1}{4},\ \text{as } x\to 0.$$

数学分析（B1）习题课讲义

第 4 次 (期中 Final Lap)

胡洁洋

作业解答 (11.3,11.5)

作业 1. (习题 3.5.11) (1) $y=\frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$, 故

$$\kappa=\frac{\frac{2}{x^3}}{(1+\frac{1}{x^4})^{\frac{3}{2}}},$$

代入 $x=1$ 得

$$\kappa=\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是曲率半径

$$\rho=\sqrt{2},$$

易得曲率中心 $(2,2)$.

(2) $y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$, 故

$$\kappa=\frac{-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}}{(1+4x^2e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

代入 $x=0$ 得

$$\kappa=-2,$$

于是曲率半径

$$\rho=\frac{1}{2},$$

易得曲率中心 $(0,\frac{1}{2})$.

作业 2. (习题 3.5.12) 代入参数曲线曲率公式易得答案为

(1) $\dfrac{1}{6}$; (2) $\dfrac{2}{\pi}$.

作业 3. (习题 3.5.13) $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$, 故

$$\rho=\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\left(x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\geq\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

等号成立当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\log 2}{2})$ 处曲率半径最小, 最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

作业 4. (习题 3.6.1)

(1)

$$y=3+x+x^2+\frac{4}{x-1}=3+x+x^2-4\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n),$$

故带 Peano 余项的 Maclaulin 展开为

$$y=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n),$$

这里 $a_0=-1$, $a_1=a_2=-3$, $a_n=-4$, $n\geq 3$.

(2)

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k}).$$

作业 5. (习题 3.6.3) 当 $x\to 0$, $\cos x-1\sim -\frac{x^2}{2}$, 故令 $u=\cos x-1$, $o(u^3)=o(x^6)$.

$$\begin{aligned}\ln(\cos x)&=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(x^6)\\&=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)+\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}\right)+\left(-\frac{x^6}{24}\right)+o(x^6)\\&=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).\end{aligned}$$

作业 6. (习题 3.6.5)

计算得: (1)

$$\tan x=x+\frac{2\sec^2\xi\tan^2\xi+\sec^4\xi}{3}x^3\quad(\xi\in(0,x)),$$

(2)

$$\frac{1}{x}=-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}\quad(\xi\in(-1,x)).$$

作业 7. (习题 3.6.6) (1)

$$\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}\sim\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8})+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}+o(1),$$

故答案为 $-\frac{1}{12}$.

(2)

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}=\frac{1+\frac{x^2}{4}-(1-\frac{x^2}{4})+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1),$$

故答案为 $\frac{1}{2}$.

(3) 令 $y=\frac{1}{x}$, 则 $y\to 0$ 当 $x\to\infty$,

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{y}-\frac{y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)}{y^2}=\frac{1}{2}+o(1),$$

故答案为 $\frac{1}{2}$.

(4) 和差化积得

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}&=-2\frac{\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{\sin^4 x}\sim\frac{(\sin x+x)(x-\sin x)}{2x^4}\\&\sim\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}+o(1),\end{aligned}$$

故答案为 $\frac{1}{6}$.

作业 8. (习题 3.6.7) 当 f 为次数不超过 n 的多项式时, $f^{(n+1)}=0$.

当 $f^{(n+1)}\equiv 0$, 由 Lagrange 余项的 Maclaulin 展开,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

为次数不超过 n 的多项式.

作业 9. (习题 3.6.8) 对任意 $x\in[0,2]$, 在 x 处 Taylor 展开, 得

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2,$$

于是

$$\begin{aligned}f(0)&=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,\\f(2)&=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(2-x)^2,\end{aligned}$$

相减得

$$2f'(x)=f(2)-f(0)-\frac{f''(\xi_1)x^2+f''(\xi_2)(2-x)^2}{2},$$

于是

$$2|f'(x)|\le 2+\frac{x^2+(2-x)^2}{2}\le 4,$$

故

$$|f'(x)| \le 2.$$

期中复习

基础概念、计算

数分 B1 期中考的重点是概念和计算, 理解了教材的概念、掌握了所有的计算方式, 就能拿大部分分 (很多题最后没算出来, 写出步骤也有不少过程分). 请检验是否完全掌握了: 数列、函数极限的定义 (注意审题: 有些题目明确指出要用定义证明, 用其他方式证明没有分)? 函数连续的定义? 极限的求法? Stolz 定理和 l'Hospital 法则使用的前提条件 (考试必须提一嘴)? 导数 (包括高阶导) 的求法? 参数方程/反函数/隐函数求导? 中值定理? Taylor 展开公式? 凸性、拐点的定义? ...

其他的请自行翻阅教材, 这里专门写一些难点.

参数方程与反函数求导: 设函数由参数方程确定:

$$\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

其中 $\psi(t), \varphi(t)$ 均二阶可导, 且 $\psi'(t) \neq 0$.

(1) 一阶导数 $\frac{dy}{dx}$

根据链式法则，$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$。由于 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{dx/dt}$，我们有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

(2) 二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ (易错)

$\frac{d^2y}{dx^2}$ 的定义是对“一阶导数 $\frac{dy}{dx}$”再次关于 x 求导. 但此时 $\frac{dy}{dx}$ 是一个关于 t 的函数, 因此必须再次使用链式法则.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \quad (\text{链式法则: } \frac{d}{dx}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\psi'(t)} \\
&= \frac{\varphi''(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\psi'(t)} \quad (\text{商的求导法则}) \\
&= \frac{\varphi''(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^3}.
\end{aligned}
$$

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调可导且 $f'(x) \neq 0$, 其反函数为 $x = g(y)$ (即 $x = f^{-1}(y)$).

以下推导基于关系式: y 是自变量 x 的函数, 反之 x 是自变量 y 的函数.

(1) 一阶导数

利用微分形式 $dy = f'(x)dx$, 可得:

$$
g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}.
$$

几何意义: 反函数的导数是原函数导数的倒数 (切线斜率互为倒数).

(2) 二阶导数 $g''(y)$ (或 $\frac{d^2x}{dy^2}$)

$$
\begin{aligned}
g''(y) &= \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy} \quad (\text{链式法则，注意变量转换}) \\
&= \left(-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)\cdot\frac{1}{f'(x)} \\
&= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.
\end{aligned}
$$

熟记 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 的导数公式.

难点

1. 连续性与一致连续性

区分: 一般的连续是先固定一个点, 在这个点附近, 函数的“震荡”很小, 用 $\varepsilon-\delta$ 语言来说就是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得任意 $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 但是, 对于某一个 ε, 在不同的 x_0 处取的 δ 可能差别是很大的, 这就引入了一致连续的概

念: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个通用的 δ, 也就是不依赖于 x_0, 使得任意 $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 事实上, 一致连续提供了函数不会在某一点无限变陡的保证, 为极限、积分、求导换序等不安全的行为作出了保障 (后面将会看到这一点).

目前我们的要求仅仅是知道如何判定是否一致连续:

1. 定义 (常用于反证法); 2. 中值定理; 3. Cantor 定理 (闭区间上连续必定一致连续).

说到闭区间上的连续函数, 还有一条常用的需知道的性质: 最值定理.

定理 0.1. *闭区间上的连续函数一定存在最大、最小值.*

看起来显然, 但证证看? 证明的核心是闭区间的紧性. 后面也有道题用到这个, 是有同学要我讲的.

2. 导数

导数不一定连续, 但是一定具有介值性: f 在 $[a, b]$ 可导, 那么 f' 可取到 $(f'(a), f'(b))$ 之间的任何值. 导数不连续的反例:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

处处无穷可微, 且在某点各阶导皆为 0 推不出 f 为常数, 反例:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

在 0 处各阶导为 0 但 f 非常数, 这个函数常用来构造鼓包函数 (Bump Function).

3. 凸函数

从图像上来看, 凸函数的定义是显然的: 任取曲线两点的割线段总在曲线上方, 称曲线为"凸"的, 反之为凹. (也有分别称为下凸、上凸的说法, 都可以) 将直观定义翻译为数学语言即得凸函数定义 (详见定义 3.26).

凸函数还有以下等价定义, 请了解并证明它们是等价的.

命题 0.2. *设 $f: I \to \mathbb{R}$, I 是开区间, 下列三个论断等价:*

(a) f 在 I 上是凸函数.

(b) (斜率单调性) 对任意 $(x_1, x_2) \subset I$, 及任意 $x \in (x_1, x_2)$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

(c) (支撑线定义) 对任意 $c \in I$, 存在一个数 a, 使得 $f(x) \geq a(x - c) + f(c)$.

这里 *(c)* 的直线 $y = a(x-c) + f(c)$ 被称为 $(c, f(c))$ 处的支撑线.

经典误区: 很多同学误以为 f 凸和 $f'' \geq 0$ 是等价的, 实际上当且仅当 f'' 存在时这才是对的, 然而很多时候, f'' 不存在, 甚至 f' 都不一定存在! 例: $y = |x|$ 是凸函数, 但在 0 处不可导.

但是同学们的误解还是有可取之处的, 下面命题揭示了凸函数良好的微分性质：虽然不一定处处可导, 但左右导数都存在, 且不可导点是非常"稀疏"的 (至多可数, 见操助教习题课).

命题 0.3 (凸函数的左右导数与可导性)**.** *设 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ 为开区间上的凸函数. 则:*

(a) *对任意 $x \in (a,b)$, 左导数 $f'_-(x)$ 与右导数 $f'_+(x)$ 均存在, 且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.*

(b) *左右导数在区间上单调递增. 具体而言, 若 $x < y$, 则*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

(c) ** f 在 (a,b) 上至多在可数个点处不可导.*

解　第一步: 左右导数存在且有序

由凸函数的几何性质（斜率单调性）可知, 对于任意 $x \in (a,b)$ 和足够小的 $h, k > 0$, 割线斜率满足:

$$\frac{f(x-k) - f(x)}{-k} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

令 $g(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。由于凸函数的割线斜率随横坐标右移而增加, 故 $g(h)$ 关于 h 单调递减（当 $h > 0$ 趋于 0 时）. 同理, 左侧割线斜率单调递增.

由单调有界原理, 右极限（右导数）存在:

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \inf_{h>0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

同理, 左极限（左导数）存在:

$$f'_-(x) = \lim_{k \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-k)}{k} = \sup_{k>0} \frac{f(x) - f(x-k)}{k}.$$

且由斜率不等式可得 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

第二步: 单调性

任取 $x < y$. 对于任意 $t \in (x,y)$, 由凸性可得三点斜率关系:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(t)}{y - t}.$$

令 $t \to x^+$，左边不等式给出 $f'_+(x) \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$；令 $t \to y^-$，右边不等式给出 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'_-(y)$。

结合第一步得:

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y) \le f'_+(y).$$

这说明 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都是 (a,b) 上的单调递增函数.

第三步: 不可导点至多可数 (不作要求)

函数 f 在点 x 处可导当且仅当 $f'_-(x) = f'_+(x)$. 因此, 不可导点集为 $D = \{x \in (a,b) \mid f'_-(x) < f'_+(x)\}$.

映射 $D \to \mathbb{Q}$: 将 $x \in D$ 映射为 $(f'_-(x), f'_+(x))$ 中的任意有理数, 注意 $(f'_-(x), f'_+(x))$ 相互不交, 于是这个映射是单射, 于是至多可数.

凸函数的强大之处在于它能够将"函数值的平均"与"平均的函数值"进行比较. 这便是著名的 Jensen 不等式.

定理 0.4 (Jensen 不等式 (离散形式)). *设 $f : I \to \mathbb{R}$ 为凸函数, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset I$, 且权 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 满足 $\lambda_i \ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, 则*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

特别地, $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证明及应用见教材习题 3.5.1, 3.5.2 等.

4. Taylor 展开——微分学的顶峰

回顾: 带 Peano 余项、Lagrange 余项的 Taylor 展开.

设 $f(x)$ 是n阶可导函数, 记 $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, 则

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n),$$

这里 $o((x-x_0)^n)$ 为 Peano 余项.

进一步, 若 f 是$n+1$阶可导的, 则

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项.

证明见教材 3.6. Peano 余项的要求低, 只要存在 n 阶导就行了, 但是给的精度粗犷: 只能得到一个 $o((x-x_0)^n)$ 的速度, 但是对于具体有多快, 不能确定, 而且是局部

性质: 只能得到 x_0 附近的信息; 为 Lagrange 余项的要求高一点, 需要多存在一阶导数 ($n+1$ 阶), 但是得到的东西也更佳: 可以用 $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 以及 ξ 在 x_0 到 x 之间的限制, 得到更好的放缩, 并且为整体性质, 能估计任意一点的拟合程度.

为什么说 Taylor 展开是微分学的顶峰呢? 因为我们学了 Taylor 展开后, 会发现之前学的许多, 不过是 Taylor 展开的特殊情形, 大有"会当凌绝顶, 一览众山小"之感了, 让我们览一览众山吧.

1. 连续: $f(x)=f(x_0)+o(1)$.
2. 可导: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0))$.
3. Lagrange 中值定理: 取 $n=0$, 得 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$.
4. Fermat 定理: x 是极值点 $\Rightarrow f'(x_0)=0$. (利用 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ 结合反证法)
5. 极值: $f'(x)=0$, $f''(x)>0 \Rightarrow x=x_0$ 极小值点.

   证明:
   $$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) \\ &\geq f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2 \qquad (\text{当}|x-x_0|\text{充分小}) \\ &\geq f(x_0). \end{aligned}$$
6. 单调: $f'>0 \Rightarrow f$ 严增.
   $$x>x_0,\ f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0).$$
7. 凹凸: $f''>0 \Rightarrow f$ 凸.
   $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

   满足支撑线定义.
8. Leibniz 公式:
   $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \quad g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

   相乘得
   $$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x_0)g^{(k-j)}(x_0)}{j!(k-j)!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

比对得

$$(fg)^{(n)}(x_0) = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)g^{(n-j)}(x_0)}{j!(n-j)!} = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j f^{(j)}(x_0)g^{(n-j)}(x_0).$$

9. 求极限. 前面学过的 l'Hospital 法则、等价无穷小 (大) 替换, 不过是把分子分母用多项式拟合留下一个小余项罢了. Taylor 展开几乎能做所有的函数极限问题.

故曰: Taylor 展开一统天下.

~~实际上 Taylor 展开还能更加霸道, 去一统积分学的天下,~~
~~不过需要带积分余项的 Taylor 展开, 都是后话~~

试题选讲

1. (24 Mid P7) 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

思路: 带根号不好求, 于是不妨平方, 去求 $\frac{a_n^2}{n}$ 极限, 带 n 也比较难处理, 猜测可以 Stolz, 去证明 $a_{n+1}^2 - a_n^2$ 存在极限, 这样就是一个纯递推 (不带 n) 的式子了. 注意

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + \frac{1}{a_n^2},$$

并不难证明 $a_n \to \infty$, 于是 $a_{n+1}^2 - a_n^2 \to 2$, 从而原极限为 $\sqrt{2}$, 过程见群文件.

2. (第二章综合习题 10) 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a,b)$, 存在 $y \in (x,b)$, 使得 $f(y) > f(x)$, 证明: $f(b) > f(a)$.

解 由 f 在闭区间上连续, 一定能取到最大值. 先证明: 最大值就是 $f(b)$, 且只能在 b 处取到. 否则若在 $x_0 \in [a,b)$ 处取到 $f(x_0) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, 则存在 $y \in [x_0, b)$, $f(y) > f(x_0)$, 与最大性矛盾, 于是 $f(a) < f(b)$(小于是因为不能在 a 处取到最大值).

3. (24 Mid P5) 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$, 求 $f^{(3n+2)}(0)$.

解 方法一: 官方解答, 求 n 阶导标准做法 Leibniz 公式, 详见群文件.

方法二: 熟知

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3} = (1-x)(1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+o(x^{3n+2})) \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+1} + \frac{0}{(3n+2)!}\cdot x^{3n+2} + o(x^{3n+2}), \end{aligned}$$

由 Taylor 展开系数唯一性, $f^{(3n+2)}(0) = 0$.

4. (18 Mid P7) 设非常数的 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有二阶导数, 且满足

$$|f''(x)| \le |f'(x)|.$$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上严格单调.

标准答案品味比较低下, 故弄玄虚, 实际上此题非常自然.

解 由 f 非常数, 存在 x_0, 使得 $f'(x_0) \neq 0$, 不失一般性, 不妨 $x_0 = 0$. 再不妨 $a := f'(x_0) > 0$. 由 f 二阶导存在, f' 连续, 于是存在邻域 $(-\delta,\delta)$, 使得 $f'(x)$ 在这个邻域恒正. 我们证明: $g(x) > 0$. 假设 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在零点, 则存在 $\delta_0 = \sup\{\delta : g(x) > 0,\ x \in (0,\delta)\} < \infty$, 由连续性, $g(\delta_0) = 0$. 记 $g(x) = f'(x)$, 条件转化为

$$|g'| \le g \text{ on } (-\delta,\delta).$$

当 $x > 0$ 时, $g(x) + g'(x) \ge 0$, 所以令

$$h(x) = e^x g(x),$$

则 $h'(x) = e^x(g(x) + g'(x)) \ge 0$, 从而 $0 = h(\delta_0) \ge h(0) = a > 0$, 矛盾.

同理, g 在 $(-\infty,0)$ 也不存在零点, 于是 $g(x) > 0$, 即 $f'(x)$ 恒大于 0, 严格单调.

5. (21 Mid P9) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n = 0,1,2,\cdots$ 满足 $|f^{(n)}(x)| \le n!|x|$(这里 $f^{(0)}(x) := f(x)$) , 证明: $f(x) \equiv 0$.

思路: 如何从各阶导和函数本身的大小产生联系? 自然考虑 Taylor 公式. 慢慢研究, 不要求一步到位. 先看看我们能得到什么比较显然的结果. 首先 $f(0) = 0$, 接着利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式,

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| = \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \le \theta|x|^{n+1} \to 0, \text{ as } n \to \infty,$$

当 $x \in (-1,1)$, 于是由夹逼定理, $f(x) = 0$ on $(-1,1)$, 又由连续性得 $f(x) = 0$ on $[-1,1]$, 这样我们离目标更近了. 但是对于 $|x| > 1$, 上面 $|x|^{n+1}$ 量级的估计是不够的, 所以得稍作改正. 根据前面的提示, 我们从 0 处作 Taylor 展开, 得到 $[-1,1]$ 处的值都是 0, 我们猜测: k 处 Taylor 展开就能得到 $[k-1,k+1]$ 都是 0, 这样一点一点用长度为 2 的闭区间将 $\mathbb{R}$"覆盖"住, 就证完了. 用归纳法写过程.

解 我们证明: 对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \equiv 0$, 当 $x \in [-k,k]$. $k = 1$ 的情形已在思路中获证, 请读者自行完善; 对 $k(k \ge 1)$, 假设命题成立, 考虑 $k+1$. 注意对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$f^{(n)}(k)=0$, 故对 $x\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}|f(k+x)|&=\left|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(k)}{j!}x^j+\frac{f^{(n)}(k+\theta x)}{n!}x^n\right|\\&=\left|\frac{f^{(n)}(k+\theta x)}{n!}x^n\right|\le(k+x)x^n\to 0,\ \text{as } n\to\infty,\end{aligned}$$

从而对 $f(x)=0$, $x\in(k,k+1)$, 由连续性, $f(k+1)=0$, 同理, $f(x)=0$, $x\in[-k-1,-k)$, 于是 $f(x)\equiv 0$, $x\in[-k-1,k+1]$, 由归纳法原理, 得证.

由 $\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}[-k,k]$, 得证.

很多同学来问一些构造函数类型的题目, 并表示没有头绪, 实际上这种题目很套路.

6. (24 Mid P8) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负且可导, $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f^3(\xi)+f'(\xi)=0$.

解 构造类的问题, 如何思考? 一般需要构造一个辅助函数 $\phi(x)=\phi(x,f)$(也就是 x 和 f 的函数), 满足 $\phi(a)=\phi(b)$, 从而推出存在 $\xi\in(a,b)$, $\phi'(\xi)=0$, 而 $\phi'(\xi)=0$ 等价于题目所要求的.

这里 f' 和 f 混合, 我们联想到复合函数求导: $\varphi(f(x))'=f'(x)\varphi'(f(x))$, 因此我们先想办法把含有 f 的都放到一个地方:

$$\frac{f'(\xi)}{f^3(\xi)}+1=0.$$

这里有一个小 bug: 如果 $f=0$ 怎么办? 后面再来修复它. 右边的 1 做个积分得为 $x+C$, 不妨取 $C=0$. 根据前面的观察, 我们想让 $\varphi'(f)=\frac{1}{f^3}$, 或是用积分, 或是瞪眼法可得 $\varphi(f)=-\frac{1}{2f^2}$ 满足要求, 于是令

$$\phi(x)=-\frac{1}{2f^2(x)}+x,$$

则 $\phi'(x)=\frac{f'(x)+f^3(x)}{f^3(x)}$, 很自然地代入得 $\phi(0)=\phi(1)=-\frac{1}{2}$, 这样基本上就做完了, 再去处理一下小 bug 即可. 注意到如果存在 x_0, $f(x_0)=0$, 注意非负条件, $f'(x_0)=0$, 此时取 $\xi=x_0$ 即可, 于是我们就可以写过程了, 见群文件.

由此, 我们便总结出了一种套路: 对于只含有 f 和 x 的问题, 我们先把 f 当成变量, 并把式子分离变量为 $f'(x)\varphi(f(x))=g(x)$, 这里 $g(x)$ 不含 f, 再作积分即可.

7. (22 Mid P7) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0)=f'(0)$, $f(1)=f'(1)$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=f''(\xi)$.

解 这里构造的辅助函数一定是 $\phi(x)=\phi(x,f,f')$. 题中所给的 0 和 1 的信息指引我们考虑 $g(x)=f(x)-f'(x)$, $g'(x)=f'(x)-f''(x)$, 于是 $f-f''=g+g'$. 像上题一样,

把所有的 g 归到一边, 把前面的套路中的 f 改成 g, 又变成了 $\phi(x,g)$ 的形式, 又是老套路套路. 即考虑 $\frac{g'}{g}+1$, 显然形式上取 $\ln(g)+x$ 即可, 但是 g 可能在正负反复横跳, 所以我们可以取指数, 考虑 $e^x g(x)$, 即令

$$\phi(x)=(f(x)-f'(x))e^x,$$

显然有

$$\phi'(x)=(f(x)-f''(x))e^x,$$

$\phi(0)=\phi(1)=0$, 后略.

事实上, 这种题等后面学习了微分方程, 会更有理解. 熟能生巧, 很多形式多看看就知道怎么构造了. 若要准备期中考, 这里有一些总结, 看过留个印象便能加速解题, 扩展构造思路:

(a) $f'(x)+\lambda f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{\lambda x}f(x)$. 特别地, 对于 $\lambda=\pm1$, $f'(x)\pm f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{\pm x}f(x)$.

(b) $f''(x)-f(x)=0$, 构造 (1) $g(x)=e^x(f'(x)-f(x))$, (2) $g(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x))$.

(c) $f''(x)+f(x)=0$, 构造 (1) $g(x)=f^2(x)+f'^2(x)$, (2) $g(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$.

(d) $xf'(x)+\alpha f(x)=0$, 构造 $g(x)=x^\alpha f(x)$.

(e) $xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$.

(f) $f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$, 构造 $g(x)=(f(x)-x)e^{-\lambda x}$.

请指出 (a)(d)(e) 的构造思路.

当堂练习:

f 在 $[0,1]$ 二阶可微, $f(0)=f(1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

补充题.(课上不讲, 有空研究)

1. 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 证明: 数列 $\{\sin(n+a)\}$ 发散.
2. 设 $f(x):\ [a,b]\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2,$$

证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

4. 设 f 在 $[0,\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $c>0$, 使得对任意 $x \geq 0$,

$$|f'(x)| \leq c|f(x)|,$$

证明: $f(x)=0$, $x \geq 0$.

另外, 上面的习题 3.6.8 也比较重要.

解答:

1. 反证法. 假设极限为 L, 则 $\sin(n+a+1)$ 极限也为 L. 又

$$\begin{aligned}\sin(n+a+1) &= \sin(n+a)\cos 1 + \cos(n+a)\sin 1 \Rightarrow \\ \cos(n+a) &= \frac{\sin(n+a+1) - \sin(n+a)\cos 1}{\sin 1} \to \frac{1-\cos 1}{\sin 1} L := L',\end{aligned}$$

即 $\cos(n+a)$ 极限也存在, 为 L'. 再考虑 $\sin(n+a+2)$ 的极限也为 L, 类似可得,

$$L' = \frac{1-\cos 2}{\sin 2} L.$$

联立, 并由

$$\frac{1-\cos 1}{\sin 1} \neq \frac{1-\cos 2}{\sin 2},$$

解得 $L = L' = 0$. 但是

$$1 = \sin^2(n+a) + \cos^2(n+a),$$

取极限得 $0 = L^2 + L'^2 = 1$, 矛盾.

2. 先证明: f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, 且导数为 0. 固定 $x_0 \in (a,b)$,

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq |x-x_0| \to 0,$$

当 $x \to x_0$, 故在 (a,b) 可导, 当然在 $[a,b]$ 连续, 且 $f'(x_0) \equiv 0$. 由 Lagrange 中值定理, 任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) = 0,$$

于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

3. 写出 $f(a)$, $f(b)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 的 Taylor 展开式:

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

两式相加,

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\right],$$

由导函数的介值性, 存在 $\xi\in(a,b)$, $f''(\xi)=\dfrac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$, 于是

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

4. 类似试题选讲第六题, 一点点证明. 先证明在某个小区间 $[0,h]$, $f(x)\equiv 0$. 待定 h. 记 $M=\max_{x\in[0,h]}|f(x)|\geq 0$, 则在 $[0,h]$, $|f'(x)|\leq cM$. 于是令 $g(x)=cMx-f(x)$, 则

$$g'(x)=cM-f'(x)\geq 0,$$

于是 $g(x)=cMx-f(x)\geq g(0)=0$, 从而 $f(x)\leq cMx$; 同理 $f(x)\geq -cMx$, 于是

$$|f(x)|\leq cMx\leq cMh.$$

但是由连续函数的性质, 存在 $x_0\in[0,h]$, $|f(x_0)|=M$, 于是

$$M=|f(x_0)|\leq cMh,$$

这启发我们取 $h=\dfrac{1}{2c}$(取一个小于 $\dfrac{1}{c}$ 的都行). 于是 $M\leq\frac{M}{2}$, 进而 $M=0$, 即

$$f(x)=0, x\in\left[0,\frac{1}{2c}\right].$$

这样一点点往右延伸, 就得到了 $f\equiv 0$. 也就是通过归纳法, 证明 $f(x)\equiv 0$, $x\in[\frac{n}{2c},\frac{n+1}{2c}]$, $n\in\mathbb{N}$, 进而得证, 细节请自行补充.

最后还是再提醒一句: 最重要的是看课本、看作业, 查漏补缺! 先相信自己能力, 再相信助教改卷, 最后相信老师给分!

预祝同学们在期中考试理想发挥!

数学分析（B1）作业解答

7.1,4.1 节

胡洁洋

作业 1. (习题 7.1.2)

(3) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty,$$

发散.

(4) $\sin n$ 不收敛到 0, 发散.

后面的几个小题都是正项级数.

(5) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{\pi}{3^n} = 2\pi,$$

收敛.

(6) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[e]{\mathrm{e}}} \sum_{n=1}^{\infty} = \infty,$$

发散.

(7) 由

$$\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} = 2^{-n} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}} \sim \frac{1}{2^n \sqrt{\mathrm{e}}},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} < \infty,$$

于是原级数收敛.

(8) 类似 (7),

$$\frac{n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} \sim n^{1-n},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} n^{-2} < \infty,$$

于是原级数收敛.

(15) 由

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} = \exp\left(n^3\ln\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)\right) = \exp\left(n^3(\cos\frac{1}{n}-1)+O(\frac{1}{n})\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{n}{2}+O(\frac{1}{n})\right) \sim \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}},$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} < \infty$$

知原级数收敛.

(16) 当 $a \geq 1$,

$$\left(\frac{an}{n+1}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}},$$

于是逐项不收敛到 0, 级数当然不收敛.

当 $0 < a < 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a^n < \infty,$$

于是收敛.

作业 2. (习题 7.1.6) 令数列

$$c_n = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

这里定义 $c_1 = a_1$. 由题意,

$$c_{n+1} - c_n = a_{n+1} - a_n - b_n < 0,$$

于是数列 $\{c_n\}$ 递减. 又

$$c_n \geq -\sum_{k=1}^{\infty} b_k > -\infty,$$

由单调收敛定理, c_n 收敛, 于是

$$a_n = c_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

收敛.

作业 3. (习题 7.1.11) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty,$$

结论成立.

作业 4. (习题 7.1.12) (1) 由

$$\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\sim\left(\frac{2}{3}\right)^n\mathrm{e}^{149/3},$$

右侧级数收敛, 知原级数绝对收敛.

(2) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1<\infty,$$

知绝对收敛.

(3) 由

$$(\sqrt{n})/n+100\sim\frac{1}{\sqrt{n}},$$

右侧级数发散知不绝对收敛; 而令

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}=\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{100}{\sqrt{x}}},$$

由对勾函数性质 (高考题), 当 $x>10000$ 时, f 递减, 所以在第 10000 项后成每项绝对值递减的交错级数, 于是条件收敛.

(4)(5) 类似 (3) 知条件收敛.

(6) 当 $p\leq 0$, 每项不收敛到 0, 不收敛. 当 $p>0$, 由 Leibniz 判别法知收敛; 但是当 $0<p\leq 1$ 时, 不绝对收敛, 故条件收敛; 当 $p>1$ 时, 绝对收敛.

(7) 由 Leibniz 判别法知收敛, 但由

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n},$$

条件收敛.

(8) 由

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2},$$

知绝对收敛.

(9) 由

$$1-\cos\frac{p}{n}\sim\frac{p^2}{2n^2},$$

知绝对收敛.

(10) 当 $p\le 0$, 每项不趋于 0, 不收敛; 当 $p>0$, 由 Leibniz 判别法知收敛, 而

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p\sim\frac{1}{2^pn^{2p}},$$

知当 $0\ <p\le\frac{1}{2}$, 条件收敛; 当 $p>\frac{1}{2}$, 绝对收敛.

后面两大题都是怎么方便怎么来, 不必理会第一还是第二代换.

作业 5. (习题 4.1.2)

(2)

$$\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

(4)

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

(6)

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\arctan\big(\sqrt{x}\big)+C.$$

(8)

$$\int\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{1+x\ln x}=\ln(1+x\ln x)+C.$$

(10)

$$\int\sin^5x\cos x\mathrm{d}x=\int\sin^5x\mathrm{d}(\sin x)=\frac{\sin^6x}{6}+C.$$

作业 6. (习题 4.1.3)

(3) 当 $x>0$, 令 $x=a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x&=\int a\tan t\sec t\cdot\frac{1}{a^3\tan^3t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2t}\mathrm{d}(\sin t)\\&=-\frac{1}{a^2\sin t}+C\\&=-\frac{1}{a\sqrt{x^2-a^2}/x}+C\\&=-\frac{x}{a\sqrt{x^2-a^2}}+C,\end{aligned}$$

易知上式对 $x<0$ 也对, 于是答案就是这个.

(4) 令 $x=a\sin t$, $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}(2t-\sin(2t))+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.\end{aligned}$$

(7) 令 $y=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}y=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x&=-\int\frac{1+\ln y}{\left(\frac{1}{y}+\ln y\right)^2}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{1+\ln y}{(1+y\ln y)^2}\mathrm{d}y\\&=-\int\frac{\mathrm{d}(y\ln y)}{(1+y\ln y)^2}=\frac{1}{1+y\ln y}+C\\&=\frac{x}{x-\ln x}+C.\end{aligned}$$

(8) 令 $x=a\tan t$, $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t\cdot a\sec^2 t}{a^2\tan^2 t\cdot a}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2\sin t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$$

(11) 令 $x=\csc t$, $\mathrm{d}x=-\cos t\csc^2 t\mathrm{d}t$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{\csc t-1}{\csc^2 t\cot t}\cot t\csc t\mathrm{d}t=\int(\sin t-1)\mathrm{d}t=-\cos t-t+C\\&=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+C.\end{aligned}$$

(12) 由

$$\frac{1}{x^8(1+x^2)}=\frac{1+x^2-x^2}{x^8(1+x^2)}=\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^6(1+x^2)}=\cdots=\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2},$$

积分得

$$\int\frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C.$$

作业 7. (习题 4.1.4)

(1) 分段讨论得

$$\int|x|\mathrm{d}x=\frac{x|x|}{2}+C.$$

(2) 分段讨论得

$$\int \max\{1,x^2\}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3} + C, & x \le -1, \\ x + C, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3} + C, & x \ge 1. \end{cases}$$

(这里的 $\dfrac{2}{3}$ 是为了让原函数连续)

作业 8. (习题 4.1.5)

(1)

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C.$$

(3)

$$\begin{aligned} I = x\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \cos(\ln x) - \int x\mathrm{d}(\cos(\ln x)) \\ &= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x \\ &= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\mathrm{d}(\sin(\ln x)) \\ &= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x \\ &= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I, \end{aligned}$$

于是

$$I = \frac{x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))}{2} + C.$$

(5)

$$\begin{aligned} I &= \int \sec x\,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \sec x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}(\sec x) \\ &= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x + \int \sec x\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - I + \ln|\sec x + \tan x|, \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C.$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x &= \int \arcsin x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}(\arcsin x) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right] + C \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
I = \int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}x &= \int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}(x) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \, \mathrm{d}[(\arcsin x)^2] \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \left(2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令 $t = \arcsin x$,

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int t \sin t \mathrm{d}t = \sin t - t \cos t + C = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C,$$

故

$$I = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$

作业 9. (习题 4.1.6)

(1) 记 $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
I_n &= \int -\sin^{n-1} x \mathrm{d}(\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,
\end{aligned}$$

故递推式为

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \ n \geq 3.$$

注. 很快这个递推式就会派上用场. 在学习定积分时我们会学到 Wallis 公式 (教材例 5.1.10): 如果记

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x,$$

则

$$W_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \pi/2, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

这里双阶乘 $n!! \coloneqq n(n-2)(n-4)\cdots$, 如果 n 是奇数则连乘到 1, 如果 n 是偶数则连乘到 2.

我们来看 Wallis 公式的一个应用: 证明 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

首先我们证明: 数列

$$a_n = n!\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

递增有上界.

第一步: 证明数列递减. 作比, 即证明

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1,$$

取对数, 即证明

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{2}{2n+1},$$

令 $x = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$, 即证明

$$\ln x < \frac{2(x-1)}{x+1},$$

这个不等式大家在高中都已证明了无数遍了, 一般在证明极值点偏移问题时经常用到, 这里就不写了. 这样我们得到了 $\{a_n\}$ 递增.

第二步: 证明存在正下界. 即证明 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n$ 存在, 转化到我们之前学的级数问题, 也就是证明递减的负项级数 (递增的正项级数取负号)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n)$$

收敛.

由

$$\begin{aligned}\ln a_{n+1}-\ln a_n &= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= 1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)\\ &= -\frac{1}{12n^2}+o(n^2)\\ &= O(\frac{1}{n^2})\geq -\frac{C_1}{n^2},\end{aligned}$$

知级数收敛, 于是原数列 $\{a_n\}$ 有下界 >0.

由此, 我们证明了存在正常数 C,

$$\lim_{n\to\infty} n!\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=C,$$

于是我们的目的就是证明 $C=\sqrt{2\pi}$.

第三步: 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1.$$

显然, $0<W_{n+1}<W_n$, 又由 Wallis 公式,

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{W_{n+2}}{W_n}<\frac{W_{n+1}}{W_n}<1,$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1.$$

第四步: 证明 $C=\sqrt{2\pi}$.

由递推公式, $W_{2n}=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $W_{2n-1}=\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$, 于是

$$W_{2n}W_{2n-1}=\frac{\pi}{4n},$$

从而

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}W_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2},$$

由等价量替换,

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\sim\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}/\mathrm{e}^{2n}}{4^nC^2n^{2n+1}/\mathrm{e}^{2n}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2C},$$

于是

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{2C}=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

解得 $C=\sqrt{2\pi}$, 从而

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n \to \infty$$

得证!

(2)

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^n \mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^n \mathrm{e}^x - nI_{n-1}.$$

作业 10. (习题 4.1.7)

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1-1/x^2}{x^2+1/x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1/x)^2-1}\mathrm{d}(x+1/x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right) + C.\end{aligned}$$

(10) 令 $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, 则 $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$,

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \int t\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{4(t^2+1-1)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= 4\int \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - 4\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &\coloneqq 4\arctan t - 4J.\end{aligned}$$

令 $t=\tan u$,

$$J = \int \cos^2 u \mathrm{d}u = \frac{u+\sin u\cos u}{2} + C.$$

代入回去, 把所有变量恢复为 x 得

$$I = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

(11) 令 $y=\arctan x$, $\mathrm{d}y\sec^2 y=\mathrm{d}x$, 于是

$$
\begin{aligned}
I=\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x=\int y\sin y\cos^3 y\mathrm{d}y=-\frac{1}{4}\int y\mathrm{d}(\cos^4 y)\\
&=-\frac{y\cos^4 y}{4}+\frac{1}{4}\int\cos^4 y\mathrm{d}y\\
&=-\frac{y\cos^4 y}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{3y}{8}+\frac{\sin 2y}{4}+\frac{\sin 4y}{32}\right)+C\\
&=\cdots
\end{aligned}
$$

太丑了。。。。。。略。。。。。。低品位.

(20)

$$
\begin{aligned}
I&=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x\\
&=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)\\
&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\
&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C\\
&=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}+C.
\end{aligned}
$$

(21) 积化和差两步, 得

$$
\begin{aligned}
I&=\int\cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 3x)\cos 3x\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}\int(\cos 2x+\cos 4x+1+\cos 6x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+C.
\end{aligned}
$$

(25)

$$
\begin{aligned}
\int\mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x&=\int\mathrm{e}^{-x^2/2}(\sqrt{\sin x})'+(\mathrm{e}^{-x^2/2})'\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int\mathrm{e}^{-x^2/2}\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}^{-x^2/2}\sqrt{\sin x}+C.
\end{aligned}
$$