数学分析（B1）作业解答

7.1,4.1 节

胡洁洋

作业 1. (习题 7.1.2)

(3) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\infty,$$

发散.

(4) $\sin n$ 不收敛到 0, 发散.

后面的几个小题都是正项级数.

(5) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\pi}{3^n}=2\pi,$$

收敛.

(6) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\geq\frac{1}{\sqrt[e]{e}}\sum_{n=1}^{\infty}=\infty,$$

发散.

(7) 由

$$\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}=2^{-n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}}}\sim\frac{1}{2^n\sqrt{e}},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{e}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<\infty,$$

于是原级数收敛.

(8) 类似 (7),

$$\frac{n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\sim n^{1-n},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{1-n}\leq 1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}n^{-2}<\infty,$$

于是原级数收敛.

(15) 由

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}=\exp\left(n^3\ln\left(1+\cos\frac{1}{n}-1\right)\right)=\exp\left(n^3(\cos\frac{1}{n}-1)+O(\frac{1}{n})\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{n}{2}+O(\frac{1}{n})\right)\sim \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}},$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}<\infty$$

知原级数收敛.

(16) 当 $a\geq 1$,

$$\left(\frac{an}{n+1}\right)^n\geq\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{1}{\mathrm{e}},$$

于是逐项不收敛到 0, 级数当然不收敛.

当 $0<a<1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n\leq\sum_{n=1}^{\infty}a^n<\infty,$$

于是收敛.

作业 2. (习题 7.1.6) 令数列

$$c_n=a_n-\sum_{k=1}^{n-1}b_k,$$

这里定义 $c_1=a_1$. 由题意,

$$c_{n+1}-c_n=a_{n+1}-a_n-b_n<0,$$

于是数列 $\{c_n\}$ 递减. 又

$$c_n\geq-\sum_{k=1}^{\infty}b_k>-\infty,$$

由单调收敛定理, c_n 收敛, 于是

$$a_n=c_n+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

收敛.

作业 3. (习题 7.1.11) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|<\infty,$$

结论成立.

作业 4. (习题 7.1.12) (1) 由

$$\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\sim\left(\frac{2}{3}\right)^n\mathrm{e}^{149/3},$$

右侧级数收敛, 知原级数绝对收敛.

(2) 由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1<\infty,$$

知绝对收敛.

(3) 由

$$(\sqrt{n})/n+100\sim\frac{1}{\sqrt{n}},$$

右侧级数发散知不绝对收敛; 而令

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+100}=\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{100}{\sqrt{x}}},$$

由对勾函数性质 (高考题), 当 $x>10000$ 时, f 递减, 所以在第 10000 项后成每项绝对值递减的交错级数, 于是条件收敛.

(4)(5) 类似 (3) 知条件收敛.

(6) 当 $p\le 0$, 每项不收敛到 0, 不收敛. 当 $p>0$, 由 Leibniz 判别法知收敛; 但是当 $0<p\le 1$ 时, 不绝对收敛, 故条件收敛; 当 $p>1$ 时, 绝对收敛.

(7) 由 Leibniz 判别法知收敛, 但由

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n},$$

条件收敛.

(8) 由

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n^2},$$

知绝对收敛.

(9) 由

$$1-\cos\frac{p}{n}\sim\frac{p^2}{2n^2},$$

知绝对收敛.

(10) 当 $p\le 0$, 每项不趋于 0, 不收敛; 当 $p>0$, 由 Leibniz 判别法知收敛, 而

$$\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p\sim\frac{1}{2^pn^{2p}},$$

知当 0 $<p\le\frac{1}{2}$, 条件收敛; 当 $p>\frac{1}{2}$, 绝对收敛.

后面两大题都是怎么方便怎么来, 不必理会第一还是第二代换.

作业 5. (习题 4.1.2)

(2)

$$\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

(4)

$$\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

(6)

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\arctan\big(\sqrt{x}\big)+C.$$

(8)

$$\int\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{1+x\ln x}=\ln(1+x\ln x)+C.$$

(10)

$$\int\sin^5x\cos x\mathrm{d}x=\int\sin^5x\mathrm{d}(\sin x)=\frac{\sin^6x}{6}+C.$$

作业 6. (习题 4.1.3)

(3) 当 $x>0$, 令 $x=a\sec t$, 则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x=\int a\tan t\sec t\cdot\frac{1}{a^3\tan^3t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\sin^2t}\mathrm{d}(\sin t)\\ &=-\frac{1}{a^2\sin t}+C\\ &=-\frac{1}{a\sqrt{x^2-a^2}/x}+C\\ &=-\frac{x}{a\sqrt{x^2-a^2}}+C,\end{aligned}$$

易知上式对 $x<0$ 也对, 于是答案就是这个.

(4) 令 $x=a\sin t$, $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$,

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}(2t-\sin(2t))+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

(7) 令 $y=\frac{1}{x}$, $\mathrm{d}y=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$,

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=-\int\frac{1+\ln y}{\left(\frac{1}{y}+\ln y\right)^2}\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=-\int\frac{1+\ln y}{(1+y\ln y)^2}\mathrm{d}y$$
$$=-\int\frac{\mathrm{d}(y\ln y)}{(1+y\ln y)^2}=\frac{1}{1+y\ln y}+C$$
$$=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

(8) 令 $x=a\tan t$, $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t\cdot a\sec^2 t}{a^2\tan^2 t\cdot a}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2\sin t}+C=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$$

(11) 令 $x=\csc t$, $\mathrm{d}x=-\cos t\csc^2 t\mathrm{d}t$, 则

$$\int\frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=-\int\frac{\csc t-1}{\csc^2 t\cot t}\cot t\csc t\mathrm{d}t=\int(\sin t-1)\mathrm{d}t=-\cos t-t+C$$
$$=-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)+C.$$

(12) 由

$$\frac{1}{x^8(1+x^2)}=\frac{1+x^2-x^2}{x^8(1+x^2)}=\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^6(1+x^2)}=\cdots=\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2},$$

积分得

$$\int\frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+\arctan x+C.$$

作业 7. (习题 4.1.4)

(1) 分段讨论得

$$\int|x|\mathrm{d}x=\frac{x|x|}{2}+C.$$

(2) 分段讨论得

$$\int \max\{1, x^2\}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3} + C, & x \le -1, \\ x + C, & -1 < x < 1, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3} + C, & x \ge 1. \end{cases}$$

(这里的 $\dfrac{2}{3}$ 是为了让原函数连续)

作业 8. (习题 4.1.5)

(1)

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}(\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x - x\cos x + C.$$

(3)

$$\begin{aligned} I = x\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x = \cos(\ln x) - \int x\mathrm{d}(\cos(\ln x)) \\ &= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\mathrm{d}x \\ &= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\mathrm{d}(\sin(\ln x)) \\ &= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\mathrm{d}x \\ &= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I, \end{aligned}$$

于是

$$I = \frac{x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))}{2} + C.$$

(5)

$$\begin{aligned} I &= \int \sec x\,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \sec x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}(\sec x) \\ &= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,\mathrm{d}x + \int \sec x\,\mathrm{d}x \\ &= \sec x\tan x - I + \ln|\sec x + \tan x|, \end{aligned}$$

故
$$I = \frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2} + C.$$

(7)
$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x &= \int \arcsin x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2} \, \mathrm{d}(\arcsin x) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}\right] + C \\
&= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right) \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.
\end{aligned}$$

(9)
$$\begin{aligned}
I = \int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}x &= \int (\arcsin x)^2 \, \mathrm{d}(x) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \, \mathrm{d}[(\arcsin x)^2] \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \left(2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

令 $t = \arcsin x$,
$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \int t \sin t \mathrm{d}t = \sin t - t \cos t + C = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C,$$

故
$$I = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} + C.$$

作业 9. (习题 4.1.6)

(1) 记 $I_n = \int \sin^n x \mathrm{d}x$, 则
$$\begin{aligned}
I_n &= \int - \sin^{n-1} x \mathrm{d}(\cos x) = - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= - \sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,
\end{aligned}$$

故递推式为
$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \ n \geq 3.$$

注. 很快这个递推式就会派上用场. 在学习定积分时我们会学到 Wallis 公式 (教材例 5.1.10): 如果记

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x,$$

则

$$W_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \pi/2, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

这里双阶乘 $n!! \coloneqq n(n-2)(n-4)\cdots$, 如果 n 是奇数则连乘到 1, 如果 n 是偶数则连乘到 2.

我们来看 Wallis 公式的一个应用: 证明 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

首先我们证明: 数列

$$a_n = n!\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

递增有上界.

第一步: 证明数列递减. 作比, 即证明

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1,$$

取对数, 即证明

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{2}{2n+1},$$

令 $x = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$, 即证明

$$\ln x < \frac{2(x-1)}{x+1},$$

这个不等式大家在高中都已证明了无数遍了, 一般在证明极值点偏移问题时经常用到, 这里就不写了. 这样我们得到了 $\{a_n\}$ 递增.

第二步: 证明存在正下界. 即证明 $\lim_{n\to\infty} \ln a_n$ 存在, 转化到我们之前学的级数问题, 也就是证明递减的负项级数 (递增的正项级数取负号)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n)$$

收敛.

由

$$\begin{aligned}\ln a_{n+1}-\ln a_n &= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= 1+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right)\\ &= -\frac{1}{12n^2}+o(n^2)\\ &= O(\frac{1}{n^2})\geq -\frac{C_1}{n^2},\end{aligned}$$

知级数收敛, 于是原数列 $\{a_n\}$ 有下界 >0.

由此, 我们证明了存在正常数 C,

$$\lim_{n\to\infty} n!\frac{\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=C,$$

于是我们的目的就是证明 $C=\sqrt{2\pi}$.

第三步: 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1.$$

显然, $0<W_{n+1}<W_n$, 又由 Wallis 公式,

$$\frac{n+1}{n+2}=\frac{W_{n+2}}{W_n}<\frac{W_{n+1}}{W_n}<1,$$

由夹逼定理得:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}=1.$$

第四步: 证明 $C=\sqrt{2\pi}$.

由递推公式, $W_{2n}=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}$, $W_{2n-1}=\dfrac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$, 于是

$$W_{2n}W_{2n-1}=\frac{\pi}{4n},$$

从而

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}W_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2},$$

由等价量替换,

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\sim\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}/\mathrm{e}^{2n}}{4^nC^2n^{2n+1}/\mathrm{e}^{2n}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2C},$$

于是

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{2C}=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

解得 $C=\sqrt{2\pi}$, 从而

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n\to\infty$$

得证!

(2)

$$I_n = \int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = x^n\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x^n\mathrm{e}^x - nI_{n-1}.$$

作业 10. (习题 4.1.7)

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1-1/x^2}{x^2+1/x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1/x)^2-1}\mathrm{d}(x+1/x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + C \\ = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)+C.\end{aligned}$$

(10) 令 $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, 则 $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$,

$$\begin{aligned}I = \int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \int t\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int\frac{4(t^2+1-1)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &= 4\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - 4\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t \\ &\coloneqq 4\arctan t - 4J.\end{aligned}$$

令 $t=\tan u$,

$$J=\int\cos^2 u\mathrm{d}u = \frac{u+\sin u\cos u}{2}+C.$$

代入回去, 把所有变量恢复为 x 得

$$I = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

(11) 令 $y=\arctan x$, $\mathrm{d}y\sec^2 y=\mathrm{d}x$, 于是

$$\begin{aligned}I=\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x=\int y\sin y\cos^3 y\mathrm{d}y&=-\frac{1}{4}\int y\mathrm{d}(\cos^4 y)\\&=-\frac{y\cos^4 y}{4}+\frac{1}{4}\int\cos^4 y\mathrm{d}y\\&=-\frac{y\cos^4 y}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{3y}{8}+\frac{\sin 2y}{4}+\frac{\sin 4y}{32}\right)+C\\&=\cdots\end{aligned}$$

太丑了。。。。。。略。。。。。。低品位.

(20)

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)\\&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\frac{x\sin x+\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C\\&=\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}+C.\end{aligned}$$

(21) 积化和差两步, 得

$$\begin{aligned}I&=\int\cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 3x)\cos 3x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int(\cos 2x+\cos 4x+1+\cos 6x)\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+C.\end{aligned}$$

(25)

$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x&=\int\mathrm{e}^{-x^2/2}(\sqrt{\sin x})'+(\mathrm{e}^{-x^2/2})'\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int\mathrm{e}^{-x^2/2}\sqrt{\sin x}\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-x^2/2}\sqrt{\sin x}+C.\end{aligned}$$