数学分析（B1）习题课讲义

第 4 次 (期中 Final Lap)

胡洁洋

作业解答 (11.3,11.5)

作业 1. (习题 3.5.11) (1) $y=\frac{1}{x}$, $y'=-\frac{1}{x^2}$, $y''=\frac{2}{x^3}$, 故

$$\kappa=\frac{\frac{2}{x^3}}{(1+\frac{1}{x^4})^{\frac{3}{2}}},$$

代入 $x=1$ 得

$$\kappa=\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是曲率半径

$$\rho=\sqrt{2},$$

易得曲率中心 $(2,2)$.

(2) $y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$, 故

$$\kappa=\frac{-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}}{(1+4x^2e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

代入 $x=0$ 得

$$\kappa=-2,$$

于是曲率半径

$$\rho=\frac{1}{2},$$

易得曲率中心 $(0,\frac{1}{2})$.

作业 2. (习题 3.5.12) 代入参数曲线曲率公式易得答案为

(1) $\dfrac{1}{6}$; (2) $\dfrac{2}{\pi}$.

作业 3. (习题 3.5.13) $y'=\frac{1}{x}$, $y''=-\frac{1}{x^2}$, 故

$$\rho=\frac{(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x^2}}=\left(x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\geq\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

等号成立当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 于是在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\log 2}{2})$ 处曲率半径最小, 最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

作业 4. (习题 3.6.1)

(1)

$$y=3+x+x^2+\frac{4}{x-1}=3+x+x^2-4\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n),$$

故带 Peano 余项的 Maclaulin 展开为

$$y=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+o(x^n),$$

这里 $a_0=-1$, $a_1=a_2=-3$, $a_n=-4$, $n\geq 3$.

(2)

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2k}).$$

作业 5. (习题 3.6.3) 当 $x\to 0$, $\cos x-1\sim -\frac{x^2}{2}$, 故令 $u=\cos x-1$, $o(u^3)=o(x^6)$.

$$\begin{aligned}\ln(\cos x)=\ln(1+u)&=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(x^6)\\&=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)+\left(-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48}\right)+\left(-\frac{x^6}{24}\right)+o(x^6)\\&=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).\end{aligned}$$

作业 6. (习题 3.6.5)

计算得: (1)

$$\tan x=x+\frac{2\sec^2\xi\tan^2\xi+\sec^4\xi}{3}x^3\quad(\xi\in(0,x)),$$

(2)

$$\frac{1}{x}=-\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}\quad(\xi\in(-1,x)).$$

作业 7. (习题 3.6.6) (1)

$$\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}\sim\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8})+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}+o(1),$$

故答案为 $-\frac{1}{12}$.

(2)

$$\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}=\frac{1+\frac{x^2}{4}-(1-\frac{x^2}{4})+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}+o(1),$$

故答案为 $\frac{1}{2}$.

(3) 令 $y=\frac{1}{x}$, 则 $y\to 0$ 当 $x\to\infty$,

$$x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{y}-\frac{y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)}{y^2}=\frac{1}{2}+o(1),$$

故答案为 $\frac{1}{2}$.

(4) 和差化积得

$$\begin{aligned}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}&=-2\frac{\sin\frac{\sin x+x}{2}\sin\frac{\sin x-x}{2}}{\sin^4 x}\sim\frac{(\sin x+x)(x-\sin x)}{2x^4}\\&\sim\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}+o(1),\end{aligned}$$

故答案为 $\frac{1}{6}$.

作业 8. (习题 3.6.7) 当 f 为次数不超过 n 的多项式时, $f^{(n+1)}=0$.

当 $f^{(n+1)}\equiv 0$, 由 Lagrange 余项的 Maclaulin 展开,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

为次数不超过 n 的多项式.

作业 9. (习题 3.6.8) 对任意 $x\in[0,2]$, 在 x 处 Taylor 展开, 得

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2,$$

于是

$$\begin{aligned}f(0)&=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,\\f(2)&=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(2-x)^2,\end{aligned}$$

相减得

$$2f'(x)=f(2)-f(0)-\frac{f''(\xi_1)x^2+f''(\xi_2)(2-x)^2}{2},$$

于是

$$2|f'(x)|\le 2+\frac{x^2+(2-x)^2}{2}\le 4,$$

故

$$|f'(x)| \le 2.$$

期中复习

基础概念、计算

数分 B1 期中考的重点是概念和计算, 理解了教材的概念、掌握了所有的计算方式, 就能拿大部分分 (很多题最后没算出来, 写出步骤也有不少过程分). 请检验是否完全掌握了: 数列、函数极限的定义 (注意审题: 有些题目明确指出要用定义证明, 用其他方式证明没有分)? 函数连续的定义? 极限的求法? Stolz 定理和 l'Hospital 法则使用的前提条件 (考试必须提一嘴)? 导数 (包括高阶导) 的求法? 参数方程/反函数/隐函数求导? 中值定理? Taylor 展开公式? 凸性、拐点的定义? ...

其他的请自行翻阅教材, 这里专门写一些难点.

参数方程与反函数求导: 设函数由参数方程确定:

$$\begin{cases} x = \psi(t) \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

其中 $\psi(t), \varphi(t)$ 均二阶可导, 且 $\psi'(t) \neq 0$.

(1) 一阶导数 $\frac{dy}{dx}$

根据链式法则，$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$。由于 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{dx/dt}$，我们有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}.$$

(2) 二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ (易错)

$\frac{d^2y}{dx^2}$ 的定义是对"一阶导数 $\frac{dy}{dx}$"再次关于 x 求导. 但此时 $\frac{dy}{dx}$ 是一个关于 t 的函数, 因此必须再次使用链式法则.

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx} \quad (\text{链式法则: } \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\right)\cdot\frac{1}{\psi'(t)} \\
&= \frac{\varphi''(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\psi'(t)} \quad (\text{商的求导法则}) \\
&= \frac{\varphi''(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^3}.
\end{aligned}
$$

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调可导且 $f'(x) \neq 0$, 其反函数为 $x = g(y)$ (即 $x = f^{-1}(y)$).

以下推导基于关系式：y 是自变量 x 的函数, 反之 x 是自变量 y 的函数.

(1) 一阶导数

利用微分形式 $dy = f'(x)dx$, 可得:

$$
g'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{f'(x)}.
$$

几何意义: 反函数的导数是原函数导数的倒数 (切线斜率互为倒数).

(2) 二阶导数 $g''(y)$ (或 $\frac{d^2x}{dy^2}$)

$$
\begin{aligned}
g''(y) &= \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\cdot\frac{dx}{dy} \quad (\text{链式法则，注意变量转换}) \\
&= \left(-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\right)\cdot\frac{1}{f'(x)} \\
&= -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}.
\end{aligned}
$$

熟记 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 的导数公式.

难点

1. 连续性与一致连续性

区分: 一般的连续是先固定一个点, 在这个点附近, 函数的“震荡”很小, 用 $\varepsilon - \delta$ 语言来说就是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得任意 $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 但是, 对于某一个 ε, 在不同的 x_0 处取的 δ 可能差别是很大的, 这就引入了一致连续的概

念: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个通用的 δ, 也就是不依赖于 x_0, 使得任意 $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 事实上, 一致连续提供了函数不会在某一点无限变陡的保证, 为极限、积分、求导换序等不安全的行为作出了保障 (后面将会看到这一点).

目前我们的要求仅仅是知道如何判定是否一致连续:

1. 定义 (常用于反证法); 2. 中值定理; 3. Cantor 定理 (闭区间上连续必定一致连续).

说到闭区间上的连续函数, 还有一条常用的需知道的性质: 最值定理.

定理 0.1. *闭区间上的连续函数一定存在最大、最小值.*

看起来显然, 但证证看? 证明的核心是闭区间的紧性. 后面也有道题用到这个, 是有同学要我讲的.

2. 导数

导数不一定连续, 但是一定具有介值性: f 在 $[a, b]$ 可导, 那么 f' 可取到 $(f'(a), f'(b))$ 之间的任何值. 导数不连续的反例:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

处处无穷可微, 且在某点各阶导皆为 0 推不出 f 为常数, 反例:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

在 0 处各阶导为 0 但 f 非常数, 这个函数常用来构造鼓包函数 (Bump Function).

3. 凸函数

从图像上来看, 凸函数的定义是显然的: 任取曲线两点的割线段总在曲线上方, 称曲线为"凸"的, 反之为凹. (也有分别称为下凸、上凸的说法, 都可以) 将直观定义翻译为数学语言即得凸函数定义 (详见定义 3.26).

凸函数还有以下等价定义, 请了解并证明它们是等价的.

命题 0.2. *设 $f : I \to \mathbb{R}$, I 是开区间, 下列三个论断等价:*

(a) f 在 I 上是凸函数.

(b) (斜率单调性) 对任意 $(x_1, x_2) \subset I$, 及任意 $x \in (x_1, x_2)$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

(c) (支撑线定义) 对任意 $c \in I$, 存在一个数 a, 使得 $f(x) \geq a(x - c) + f(c)$.

这里 (c) 的直线 $y = a(x-c) + f(c)$ 被称为 $(c, f(c))$ 处的支撑线.

经典误区: 很多同学误以为 f 凸和 $f'' \geq 0$ 是等价的, 实际上当且仅当 f'' 存在时这才是对的, 然而很多时候, f'' 不存在, 甚至 f' 都不一定存在! 例: $y = |x|$ 是凸函数, 但在 0 处不可导.

但是同学们的误解还是有可取之处的, 下面命题揭示了凸函数良好的微分性质：虽然不一定处处可导, 但左右导数都存在, 且不可导点是非常“稀疏”的 (至多可数, 见操助教习题课).

命题 0.3 (凸函数的左右导数与可导性)**.** *设 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ 为开区间上的凸函数. 则:*

(a) *对任意 $x \in (a,b)$, 左导数 $f'_-(x)$ 与右导数 $f'_+(x)$ 均存在, 且 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.*

(b) *左右导数在区间上单调递增. 具体而言, 若 $x < y$, 则*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

(c) ** f 在 (a,b) 上至多在可数个点处不可导.*

解　第一步: 左右导数存在且有序

由凸函数的几何性质（斜率单调性）可知, 对于任意 $x \in (a,b)$ 和足够小的 $h, k > 0$, 割线斜率满足:

$$\frac{f(x-k)-f(x)}{-k} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

令 $g(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$。由于凸函数的割线斜率随横坐标右移而增加, 故 $g(h)$ 关于 h 单调递减（当 $h > 0$ 趋于 0 时）. 同理, 左侧割线斜率单调递增.

由单调有界原理, 右极限（右导数）存在:

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \inf_{h>0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

同理, 左极限（左导数）存在:

$$f'_-(x) = \lim_{k \to 0^+} \frac{f(x)-f(x-k)}{k} = \sup_{k>0} \frac{f(x)-f(x-k)}{k}.$$

且由斜率不等式可得 $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

第二步: 单调性

任取 $x < y$. 对于任意 $t \in (x,y)$, 由凸性可得三点斜率关系:

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(t)}{y-t}.$$

令 $t\to x^+$，左边不等式给出 $f'_+(x)\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$；令 $t\to y^-$，右边不等式给出 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'_-(y)$。

结合第一步得:

$$f'_-(x)\le f'_+(x)\le f'_-(y)\le f'_+(y).$$

这说明 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$ 都是 (a,b) 上的单调递增函数.

第三步: 不可导点至多可数 (不作要求)

函数 f 在点 x 处可导当且仅当 $f'_-(x)=f'_+(x)$. 因此, 不可导点集为 $D=\{x\in(a,b)\mid f'_-(x)<f'_+(x)\}$.

映射 $D\to\mathbb{Q}$: 将 $x\in D$ 映射为 $(f'_-(x),f'_+(x))$ 中的任意有理数, 注意 $(f'_-(x),f'_+(x))$ 相互不交, 于是这个映射是单射, 于是至多可数.

凸函数的强大之处在于它能够将"函数值的平均"与"平均的函数值"进行比较. 这便是著名的 Jensen 不等式.

定理 0.4 (Jensen 不等式 (离散形式)). *设 $f:I\to\mathbb{R}$ 为凸函数, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subset I$, 且权 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_i\ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$, 则*

$$f\left(\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i\right)\le\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i).$$

特别地, $f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证明及应用见教材习题 3.5.1, 3.5.2 等.

4. Taylor 展开——微分学的顶峰

回顾: 带 Peano 余项、Lagrange 余项的 Taylor 展开.

设 $f(x)$ 是n阶可导函数, 记 $T_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, 则

$$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n),$$

这里 $o((x-x_0)^n)$ 为 Peano 余项.

进一步, 若 f 是$n+1$阶可导的, 则

$$f(x)=T_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里 $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 Lagrange 余项.

证明见教材 3.6. Peano 余项的要求低, 只要存在 n 阶导就行了, 但是给的精度粗犷: 只能得到一个 $o((x-x_0)^n)$ 的速度, 但是对于具体有多快, 不能确定, 而且是局部

性质: 只能得到 x_0 附近的信息; 为 Lagrange 余项的要求高一点, 需要多存在一阶导数 ($n+1$ 阶), 但是得到的东西也更佳: 可以用 $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, 以及 ξ 在 x_0 到 x 之间的限制, 得到更好的放缩, 并且为整体性质, 能估计任意一点的拟合程度.

为什么说 Taylor 展开是微分学的顶峰呢? 因为我们学了 Taylor 展开后, 会发现之前学的许多, 不过是 Taylor 展开的特殊情形, 大有"会当凌绝顶, 一览众山小"之感了, 让我们览一览众山吧.

1. 连续: $f(x)=f(x_0)+o(1)$.
2. 可导: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o((x-x_0))$.
3. Lagrange 中值定理: 取 $n=0$, 得 $f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$.
4. Fermat 定理: x 是极值点 $\Rightarrow f'(x_0)=0$. (利用 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$ 结合反证法)
5. 极值: $f'(x)=0$, $f''(x)>0 \Rightarrow x=x_0$ 极小值点.

   证明:
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) \\ &\geq f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{4}(x-x_0)^2 \qquad (\text{当}|x-x_0|\text{充分小}) \\ &\geq f(x_0). \end{aligned}$$
6. 单调: $f'>0 \Rightarrow f$ 严增.
$$x>x_0,\ f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)>f(x_0).$$
7. 凹凸: $f''>0 \Rightarrow f$ 凸.
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),$$

   满足支撑线定义.
8. Leibniz 公式:
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\quad g(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

   相乘得
$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{f^{(j)}(x_0)g^{(k-j)}(x_0)}{j!(k-j)!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),$$

比对得

$$(fg)^{(n)}(x_0) = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)g^{(n-j)}(x_0)}{j!(n-j)!} = \sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j f^{(j)}(x_0)g^{(n-j)}(x_0).$$

9. 求极限. 前面学过的 l'Hospital 法则、等价无穷小 (大) 替换, 不过是把分子分母用多项式拟合留下一个小余项罢了. Taylor 展开几乎能做所有的函数极限问题.

故曰: Taylor 展开一统天下.

~~实际上 Taylor 展开还能更加霸道, 去一统积分学的天下,~~
~~不过需要带积分余项的 Taylor 展开, 都是后话~~

试题选讲

1. (24 Mid P7) 设 $a_1 > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$.

思路: 带根号不好求, 于是不妨平方, 去求 $\dfrac{a_n^2}{n}$ 极限, 带 n 也比较难处理, 猜测可以 Stolz, 去证明 $a_{n+1}^2 - a_n^2$ 存在极限, 这样就是一个纯递推 (不带 n) 的式子了. 注意

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + \frac{1}{a_n^2},$$

并不难证明 $a_n \to \infty$, 于是 $a_{n+1}^2 - a_n^2 \to 2$, 从而原极限为 $\sqrt{2}$, 过程见群文件.

2. (第二章综合习题 10) 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a,b)$, 存在 $y \in (x,b)$, 使得 $f(y) > f(x)$, 证明: $f(b) > f(a)$.

解 由 f 在闭区间上连续, 一定能取到最大值. 先证明: 最大值就是 $f(b)$, 且只能在 b 处取到. 否则若在 $x_0 \in [a,b)$ 处取到 $f(x_0) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$, 则存在 $y \in [x_0,b)$, $f(y) > f(x_0)$, 与最大性矛盾, 于是 $f(a) < f(b)$(小于是因为不能在 a 处取到最大值).

3. (24 Mid P5) 设 $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$, 求 $f^{(3n+2)}(0)$.

解 方法一: 官方解答, 求 n 阶导标准做法 Leibniz 公式, 详见群文件.

方法二: 熟知

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x^3} = (1-x)(1+x^3+x^6+\cdots+x^{3n}+o(x^{3n+2})) \\ &= 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots + x^{3n} - x^{3n+1} + \frac{0}{(3n+2)!}\cdot x^{3n+2} + o(x^{3n+2}), \end{aligned}$$

由 Taylor 展开系数唯一性, $f^{(3n+2)}(0) = 0$.

4. (18 Mid P7) 设非常数的 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有二阶导数, 且满足

$$|f''(x)| \le |f'(x)|.$$

求证: $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上严格单调.

标准答案品味比较低下, 故弄玄虚, 实际上此题非常自然.

解 由 f 非常数, 存在 x_0, 使得 $f'(x_0) \neq 0$, 不失一般性, 不妨 $x_0 = 0$. 再不妨 $a := f'(x_0) > 0$. 由 f 二阶导存在, f' 连续, 于是存在邻域 $(-\delta,\delta)$, 使得 $f'(x)$ 在这个邻域恒正. 我们证明: $g(x) > 0$. 假设 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在零点, 则存在 $\delta_0 = \sup\{\delta : g(x) > 0,\ x \in (0,\delta)\} < \infty$, 由连续性, $g(\delta_0) = 0$. 记 $g(x) = f'(x)$, 条件转化为

$$|g'| \le g \text{ on } (-\delta,\delta).$$

当 $x > 0$ 时, $g(x) + g'(x) \ge 0$, 所以令

$$h(x) = e^x g(x),$$

则 $h'(x) = e^x(g(x) + g'(x)) \ge 0$, 从而 $0 = h(\delta_0) \ge h(0) = a > 0$, 矛盾.

同理, g 在 $(-\infty,0)$ 也不存在零点, 于是 $g(x) > 0$, 即 $f'(x)$ 恒大于 0, 严格单调.

5. (21 Mid P9) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且对任意实数 x 及 $n = 0,1,2,\cdots$ 满足 $|f^{(n)}(x)| \le n!|x|$(这里 $f^{(0)}(x) := f(x)$) , 证明: $f(x) \equiv 0$.

思路: 如何从各阶导和函数本身的大小产生联系? 自然考虑 Taylor 公式. 慢慢研究, 不要求一步到位. 先看看我们能得到什么比较显然的结果. 首先 $f(0) = 0$, 接着利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式,

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| = \left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right| \le \theta|x|^{n+1} \to 0, \text{ as } n \to \infty,$$

当 $x \in (-1,1)$, 于是由夹逼定理, $f(x) = 0$ on $(-1,1)$, 又由连续性得 $f(x) = 0$ on $[-1,1]$, 这样我们离目标更近了. 但是对于 $|x| > 1$, 上面 $|x|^{n+1}$ 量级的估计是不够的, 所以得稍作改正. 根据前面的提示, 我们从 0 处作 Taylor 展开, 得到 $[-1,1]$ 处的值都是 0, 我们猜测: k 处 Taylor 展开就能得到 $[k-1,k+1]$ 都是 0, 这样一点一点用长度为 2 的闭区间将 $\mathbb{R}$“覆盖”住, 就证完了. 用归纳法写过程.

解 我们证明: 对任意 $k \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \equiv 0$, 当 $x \in [-k,k]$. $k = 1$ 的情形已在思路中获证, 请读者自行完善; 对 $k(k \ge 1)$, 假设命题成立, 考虑 $k+1$. 注意对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$f^{(n)}(k)=0$, 故对 $x\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}|f(k+x)|&=\left|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(k)}{j!}x^j+\frac{f^{(n)}(k+\theta x)}{n!}x^n\right|\\&=\left|\frac{f^{(n)}(k+\theta x)}{n!}x^n\right|\le(k+x)x^n\to0,\ \text{as } n\to\infty,\end{aligned}$$

从而对 $f(x)=0$, $x\in(k,k+1)$, 由连续性, $f(k+1)=0$, 同理, $f(x)=0$, $x\in[-k-1,-k)$, 于是 $f(x)\equiv0$, $x\in[-k-1,k+1]$, 由归纳法原理, 得证.

由 $\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}[-k,k]$, 得证.

很多同学来问一些构造函数类型的题目, 并表示没有头绪, 实际上这种题目很套路.

6. (24 Mid P8) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负且可导, $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 满足 $f^3(\xi)+f'(\xi)=0$.

解 构造类的问题, 如何思考? 一般需要构造一个辅助函数 $\phi(x)=\phi(x,f)$(也就是 x 和 f 的函数), 满足 $\phi(a)=\phi(b)$, 从而推出存在 $\xi\in(a,b)$, $\phi'(\xi)=0$, 而 $\phi'(\xi)=0$ 等价于题目所要求的.

这里 f' 和 f 混合, 我们联想到复合函数求导: $\varphi(f(x))'=f'(x)\varphi'(f(x))$, 因此我们先想办法把含有 f 的都放到一个地方:

$$\frac{f'(\xi)}{f^3(\xi)}+1=0.$$

这里有一个小 bug: 如果 $f=0$ 怎么办? 后面再来修复它. 右边的 1 做个积分得为 $x+C$, 不妨取 $C=0$. 根据前面的观察, 我们想让 $\varphi'(f)=\frac{1}{f^3}$, 或是用积分, 或是瞪眼法可得 $\varphi(f)=-\frac{1}{2f^2}$ 满足要求, 于是令

$$\phi(x)=-\frac{1}{2f^2(x)}+x,$$

则 $\phi'(x)=\frac{f'(x)+f^3(x)}{f^3(x)}$, 很自然地代入得 $\phi(0)=\phi(1)=-\frac{1}{2}$, 这样基本上就做完了, 再去处理一下小 bug 即可. 注意到如果存在 x_0, $f(x_0)=0$, 注意非负条件, $f'(x_0)=0$, 此时取 $\xi=x_0$ 即可, 于是我们就可以写过程了, 见群文件.

由此, 我们便总结出了一种套路: 对于只含有 f 和 x 的问题, 我们先把 f 当成变量, 并把式子分离变量为 $f'(x)\varphi(f(x))=g(x)$, 这里 $g(x)$ 不含 f, 再作积分即可.

7. (22 Mid P7) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0)=f'(0)$, $f(1)=f'(1)$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=f''(\xi)$.

解 这里构造的辅助函数一定是 $\phi(x)=\phi(x,f,f')$. 题中所给的 0 和 1 的信息指引我们考虑 $g(x)=f(x)-f'(x)$, $g'(x)=f'(x)-f''(x)$, 于是 $f-f''=g+g'$. 像上题一样,

把所有的 g 归到一边, 把前面的套路中的 f 改成 g, 又变成了 $\phi(x,g)$ 的形式, 又是老套路套路. 即考虑 $\frac{g'}{g}+1$, 显然形式上取 $\ln(g)+x$ 即可, 但是 g 可能在正负反复横跳, 所以我们可以取指数, 考虑 $e^x g(x)$, 即令

$$\phi(x)=(f(x)-f'(x))e^x,$$

显然有

$$\phi'(x)=(f(x)-f''(x))e^x,$$

$\phi(0)=\phi(1)=0$, 后略.

事实上, 这种题等后面学习了微分方程, 会更有理解. 熟能生巧, 很多形式多看看就知道怎么构造了. 若要准备期中考, 这里有一些总结, 看过留个印象便能加速解题, 扩展构造思路:

(a) $f'(x)+\lambda f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{\lambda x}f(x)$. 特别地, 对于 $\lambda=\pm1$, $f'(x)\pm f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{\pm x}f(x)$.

(b) $f''(x)-f(x)=0$, 构造 (1) $g(x)=e^x(f'(x)-f(x))$, (2) $g(x)=e^{-x}(f'(x)+f(x))$.

(c) $f''(x)+f(x)=0$, 构造 (1) $g(x)=f^2(x)+f'^2(x)$, (2) $g(x)=f(x)\sin x+f'(x)\cos x$.

(d) $xf'(x)+\alpha f(x)=0$, 构造 $g(x)=x^\alpha f(x)$.

(e) $xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$.

(f) $f'(x)-\lambda(f(x)-x)=1$, 构造 $g(x)=(f(x)-x)e^{-\lambda x}$.

请指出 (a)(d)(e) 的构造思路.

当堂练习:

f 在 $[0,1]$ 二阶可微, $f(0)=f(1)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

补充题.(课上不讲, 有空研究)

1. 对任意 $a\in\mathbb{R}$, 证明: 数列 $\{\sin(n+a)\}$ 发散.
2. 设 $f(x):\ [a,b]\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$,

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le(x_1-x_2)^2,$$

证明: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常数.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) = \frac{1}{4}(b-a)^2 f''(\xi).$$

4. 设 f 在 $[0,\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $c>0$, 使得对任意 $x \geq 0$,

$$|f'(x)| \leq c|f(x)|,$$

证明: $f(x)=0$, $x \geq 0$.

另外, 上面的习题 3.6.8 也比较重要.

解答:

1. 反证法. 假设极限为 L, 则 $\sin(n+a+1)$ 极限也为 L. 又

$$\begin{aligned}&\sin(n+a+1) = \sin(n+a)\cos 1 + \cos(n+a)\sin 1 \Rightarrow \\ &\qquad \cos(n+a) = \frac{\sin(n+a+1) - \sin(n+a)\cos 1}{\sin 1} \to \frac{1-\cos 1}{\sin 1}L := L',\end{aligned}$$

即 $\cos(n+a)$ 极限也存在, 为 L'. 再考虑 $\sin(n+a+2)$ 的极限也为 L, 类似可得,

$$L' = \frac{1-\cos 2}{\sin 2}L.$$

联立, 并由

$$\frac{1-\cos 1}{\sin 1} \neq \frac{1-\cos 2}{\sin 2},$$

解得 $L = L' = 0$. 但是

$$1 = \sin^2(n+a) + \cos^2(n+a),$$

取极限得 $0 = L^2 + L'^2 = 1$, 矛盾.

2. 先证明: f 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导, 且导数为 0. 固定 $x_0 \in (a,b)$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq |x - x_0| \to 0,$$

当 $x \to x_0$, 故在 (a,b) 可导, 当然在 $[a,b]$ 连续, 且 $f'(x_0) \equiv 0$. 由 Lagrange 中值定理, 任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$,

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) = 0,$$

于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

3. 写出 $f(a)$, $f(b)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 的 Taylor 展开式:

$$f(a)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

两式相加,

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\right],$$

由导函数的介值性, 存在 $\xi\in(a,b)$, $f''(\xi)=\dfrac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$, 于是

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

4. 类似试题选讲第六题, 一点点证明. 先证明在某个小区间 $[0,h]$, $f(x)\equiv 0$. 待定 h. 记 $M=\max_{x\in[0,h]}|f(x)|\geq 0$, 则在 $[0,h]$, $|f'(x)|\leq cM$. 于是令 $g(x)=cMx-f(x)$, 则

$$g'(x)=cM-f'(x)\geq 0,$$

于是 $g(x)=cMx-f(x)\geq g(0)=0$, 从而 $f(x)\leq cMx$; 同理 $f(x)\geq -cMx$, 于是

$$|f(x)|\leq cMx\leq cMh.$$

但是由连续函数的性质, 存在 $x_0\in[0,h]$, $|f(x_0)|=M$, 于是

$$M=|f(x_0)|\leq cMh,$$

这启发我们取 $h=\dfrac{1}{2c}$(取一个小于 $\dfrac{1}{c}$ 的都行). 于是 $M\leq\frac{M}{2}$, 进而 $M=0$, 即

$$f(x)=0, x\in\left[0,\frac{1}{2c}\right].$$

这样一点点往右延伸, 就得到了 $f\equiv 0$. 也就是通过归纳法, 证明 $f(x)\equiv 0$, $x\in[\frac{n}{2c},\frac{n+1}{2c}]$, $n\in\mathbb{N}$, 进而得证, 细节请自行补充.

最后还是再提醒一句: 最重要的是看课本、看作业, 查漏补缺! 先相信自己能力, 再相信助教改卷, 最后相信老师给分!

预祝同学们在期中考试理想发挥!