数学分析（B1）作业解答

第二次

胡洁洋

作业 1. (习题 1.2.17)

(2) 由 $\{a_n\}$ 严增, 只需证明 $\{a_n\}$ 有上界. 由

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k+1} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3}\frac{1-(1/3)^n}{1-1/3} < \frac{1}{2},$$

及单调收敛定理知 $\{a_n\}$ 收敛.

(4) 由

$$|a_{n+p}-a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{\cos k}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1},$$

当 $n \to \infty$, $\frac{1}{n+1} \to 0$, 于是 $\sup_{p\geq 0} |a_{n+p}-a_n| \to 0$, 由 Cauchy 收敛准则, $\{a_n\}$ 收敛.

注. 这里 A, B 是根据待定系数法确定的.

作业 2. (习题 1.2.18)

(1) 记 $b_n = n$, $c_n = c^n$, 由 $\{c_n\}$ 严增趋于 ∞,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{c_{n+1}-c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(c-1)c^n} = 0,$$

由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0.$$

(3) 由均值不等式, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \dfrac{a}{a_n}}$, 得 $a_n \geq \sqrt{a}$, 当 $n \geq 1$.

再由 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{a-a_n^2}{a_n}$, 当 $n \geq 1$, 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$递减, 且大于 $\sqrt{a}$, 由单调收敛定理知 $\{a_n\}$ 收敛到极限 $b \geq \sqrt{a}$, 下证 $b = \sqrt{a}$. 对递推式 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{a}{a_n}\right)$ 左右取极限, 知

$$b = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right),$$

解得 $b = \sqrt{a}$, 于是 $\{a_n\}$ 收敛到极限 $\sqrt{a}$.

(5) 递推式 $a_{n+1} = \sin a_n$, 先归纳证明 $0 < a_{n+1} < a_n < \pi/2$.

对 $n=1$, 由 $0<1<\pi/2$, $0<a_2=\sin a_1<a_1<\pi/2$, 成立. 对 $n(n\geq 1)$, 假设成立, 来看 $n+1$. 由归纳假设, $a_{n+1}\in(0,\pi/2)$, 故 $0<a_{n+2}=\sin a_{n+1}<a_{n+1}<\pi/2$, 由归纳法原理知结论成立. 回原题, 我们有 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n>0$, 从而 a_n 收敛到极限 $0\leq a<1$. 在递推式两边取极限, 有

$$a=\sin a,$$

当 $a\neq 0$ 时, 式子不成立, 故 $a=0$.

作业 3. (习题 1.2.21) 由题意,

$$\frac{a_n}{b_n}\geq\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>0,$$

由单调收敛定理, 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 故 $a_n=b_n\cdot\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

作业 4. (习题 1.2.22) 记数列 $b_n\coloneqq\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 则 $\{b_n\}$ 的任意子列均收敛到 e.

(1) $a_n=b_{2n+1}\to\mathrm{e}$, 当 $n\to\infty$.

(2) $a_n=\dfrac{1}{b_{n-3}}\left(\dfrac{n-3}{n-2}\right)^4\to\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 当 $n\to\infty$.

(3) $a_n=\dfrac{1}{b_{n+1}}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\to\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 当 $n\to\infty$.

(4) $a_n=b_{n^3}^2\to\mathrm{e}^2$, 当 $n\to\infty$.

作业 5. (习题 1.3.2)

(2) 在 1 的任意去心邻域内,

$$\frac{x^n-1}{x-1}\equiv x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1.$$

由极限四则运算, 及右边每项趋于 1 的极限均为 1, 故右边趋于 1 的极限为 n, 进而

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1=n.$$

(4) 由 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+6}{5x-1}=\frac{3}{5}$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{8x-5}{5x-1}=\frac{8}{5}$, 及极限四则运算, 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+6}{5x-1}\right)^{70}\left(\frac{8x-5}{5x-1}\right)^{20}=\frac{3^{70}\cdot 8^{20}}{5^{90}}.$$

作业 6. (习题 1.3.4)

对任意 $\varepsilon>0$, 存在正实数 M, 使得对任意 $x>M$, $|f(x)-l|<\varepsilon$. 对这个 M, 存在正整数 N, 使得对任意 $n>N$, $a_n>M$, 从而 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 由极限定义知

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=l,$$

特别地, 取 $a_n=n$ 即得

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=l.$$

作业 7. (习题 1.3.7)

由 $y=\sin x$ 是奇函数, 只需证明 $\alpha\geq 0$ 情形. $\alpha=0$ 左右都是 0; 下考虑 $\alpha>0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 对任意 $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $0<\delta<\pi/2$, 对任意 $x\in(0,\delta)$,

$$1-\varepsilon<\frac{\sin x}{x}<1 \iff (1-\varepsilon)\,x<\sin x<x,$$

于是, 当 $n>N\coloneqq\left[\dfrac{\alpha}{\delta}\right]+1$,

$$(1-\varepsilon)\,\frac{k\alpha}{n^2}<\sin\frac{k\alpha}{n^2}<\frac{k\alpha}{n^2}, 1\leq k\leq n.$$

对 k 从 1 到 n 求和,

$$(1-\varepsilon)\,\frac{n+1}{2n}\alpha<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}<\frac{n+1}{2n}\alpha,\ n>\left[\frac{\alpha}{\delta}\right]+1,$$

从而

$$0>\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}-\frac{(n+1)\alpha}{2n}>-\varepsilon\frac{n+1}{2n}\alpha\geq-\alpha\varepsilon,$$

即 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}-\frac{(n+1)\alpha}{2n}\right|<\alpha\varepsilon$, 任意 $n>N$. 由极限定义,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{k\alpha}{n^2}--\frac{(n+1)\alpha}{2n}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}=0+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}.$$

注. 如果用上下极限 (见上次习题课), 这题的过程会好写很多, 不妨一试; 另外, 这道题也是 ε-room 思想的一次体现. 当然, 这题的其他方法也很多, 比如三角等差数列求和公式.

作业 8. (习题 1.3.8)

由定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 任意 $|x|>M$, $|f(x)-l|<\varepsilon$, 于是任意

$|x| < 1/M$, $x \neq 0$,

$$\left| f\left(\frac{1}{x}\right) - l \right| < \varepsilon.$$

由函数极限定义得证.

叙述: 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$; 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 证明类似上面, 只不过把 $|x| > M$ 的绝对值去掉, 不做赘述.

注. 由此可见, 在分析里很多时候, ∞ 和 0 是等价的! 这点等同学们学习了复变函数, 会有更深刻的体会.

作业 9. (习题 1.3.14)

只证 $+\infty$ 情形. 在正方向无限远离原点时, 设曲线 C 与 l 在横坐标 x 处的点分别为 M, N, $MH \perp L$ 于 H, 则 $\dfrac{|MH|}{|ML|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, 于是,

$$L\text{为}f(x) \to +\infty\text{渐近线} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} |MH| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} |ML| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b.$$

"$\Rightarrow$": 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$, 除以 x 知 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} - a = 0$.

"$\Leftarrow$": $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ 当然能推出 $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

求渐近线方程:

(1) 先考虑水平、垂直渐近线. 由于

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty,$$

不存在水平渐近线; 当 $x \to -(1/\mathrm{e})^-$, $y(x) \to +\infty$, 所以 $x = -1/\mathrm{e}$ 是一条垂直渐近线.

再考虑斜渐近线. 由

$$\frac{y}{x} = \ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{x}\right) \to 1, \text{ as } x \to \infty,$$

及

$$y - x = x \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{e}x}\right) \sim x \cdot \frac{1}{\mathrm{e}x} = \frac{1}{\mathrm{e}}, \text{ as } x \to \infty,$$

于是知斜渐近线为 $y = x + 1/\mathrm{e}$.

(2) 类似求得渐近线为: $x = 1$, $y = 3x + 1$.

作业 10. (习题 1.3.9)

(1) $\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x} \sim \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$, $x \to 0$, 于是极限为 $\dfrac{2}{5}$.

(2) $\dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \dfrac{1 - x^2/2 - 1 + (3x)^2/2 + o(x^2)}{x^2} = 4 + o(1)$, $x \to 0$, 于是极限

为 4.

(3) 当 $x > 114514$, $0 < \dfrac{x+1}{2x-1} < 0.1919$, 于是此时 $0 < \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x < 0.1919^x \to 0$, 当 $x \to \infty$. 由夹逼定理, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0$.

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} \overset{t=(x^2-1)/2}{=} \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+1} = \mathrm{e}^2.$$

作业 11. (习题 1.3.12) 设 k 为正整数, 则

$$y\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 2k\pi+\frac{\pi}{2} \to +\infty,\ \text{as } k\to\infty; \qquad y\left(2k\pi\right) = 0,\ \text{as } k\to\infty,$$

由定义知函数在 $\mathbb{R}^+$ 无界但非无穷大量.

作业 12. (习题 1.3.13) 类似 1.3.12,

$$y\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = 2k\pi \to +\infty, \text{as } k\to\infty,$$

故无界, 又当 $x \to 0^+$ 时, 由

$$y\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right) = 0$$

知并非无穷大量.

作业 13. (习题 1.3.18)

(3)

$$\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x} \sim \frac{\frac{\sin x}{n}}{x} \sim \frac{\frac{x}{n}}{x} = \frac{1}{n},\ \text{as } x\to 0.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} \sim \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8},\ \text{as } x\to 0.$$

(5)

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} \sim \frac{\frac{x+x^2}{2}}{2x} \to \frac{1}{4},\ \text{as } x\to 0.$$