# 数学分析（B1）习题课讲义

## 第 1 次

胡洁洋

---

分析是极限的艺术。

## 作业解答

**作业 1. (习题 1.1.1)** 由 $a$ 有理数, 设 $a = p/q$, $p, q$ 为互质整数. 若 $a + b$ 有理数, 设 $a + b = u/v$, 则

$$b = \frac{u}{v} - \frac{p}{q} = \frac{uq - vp}{vq} \in \mathbb{Q},$$

矛盾; 因 $b$ 无理数, $-b$ 也是, 由前所证, $a - b$ 也是无理数. 类似可证 $ab$, $b/a$ 无理数.

**作业 2. (习题 1.1.2)** 任取 $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, 考虑

$$x_0 = \frac{x_1 + (\sqrt{2} - 1)x_2}{\sqrt{2}},$$

我们证明: 1) $x_1 < x_0 < x_2$; 2) $x_0$ 为无理数.

1):

$$x_0 - x_1 = (\sqrt{2} - 1)(x_2 - x_0) = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}(x_2 - x_1) > 0$$

2): 假设 $x_0$ 是有理数, 则由习题 1.1,

$$x_0 - x_2 = \frac{\sqrt{2}(x_1 - x_2)}{2},$$

左边是有理数, 但右边是无理数 ($\sqrt{2}$ 无理数, 乘有理数 $(x_1 - x_2)/2$ 还是无理数), 矛盾.

注. 构造来自高中解析几何常见的定比分点坐标公式, 要证明存在性, 最简单的方式就是直接构造一个合乎题意的解, $\sqrt{2}$ 换成任意正无理数都可以.

**作业 3. (习题 1.1.3)** $\sqrt{2}$ 无理性课上已经讲过. $\sqrt{3}$ 也是类似: 假设其为有理数, 设 $\sqrt{3} = p/q$, $p, q$ 为互质正整数, 那么由

$$p^2 = 3q^2,$$

$3 \mid p$, 设 $p=3r$, 则 $q^2=3r^2$, 于是 $3 \mid q$, 进而 $(p,q) \geq 3 \neq 1$, 矛盾.

$\sqrt{3}+\sqrt{2}$: 假设其为有理数, 则 $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 也是有理数, 于是

$$\sqrt{2}=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\right]$$

是有理数, 这不可能.

**作业 4. (习题 1.1.6)** 对 $n$ 归纳. $n=1$, 是恒等式. 对 $n-1(n\geq 2)$, 假设命题成立, 现在来看 $n$. 当 $a_1+\cdots+a_n \leq -1$, 左边 $\geq 0 \geq$ 右边, 结论已经成立; 当 $a_1+\cdots+a_n > -1$, 由归纳假设,

$$\begin{aligned}(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_n+1) &\geq (a_1+\cdots+a_{n-1}+1)(a_n+1)\\ &= 1+a_1+a_2+\cdots+a_n+(a_1+\cdots+a_{n-1})a_n\\ &\geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.\end{aligned}$$

最后是因为 $a_1+\cdots+a_{n-1}, a_n > -1$ 且二者同号.

*注*. 很多同学没有分类 $a_1+\cdots+a_n$ 和 $-1$ 的大小关系而是直接用了 $n=2$ 的归纳假设, 这是不对的, 因为不满足 $n=2$ 时候的条件, 所有数 $\geq -1$. 一种修补的方案如上, 分类讨论; 另一种方式是用了 $n-1$ 的归纳假设后, 直接计算

$$\geq (a_1+\cdots+a_{n-1}+1)(a_n+1)=1+\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_n \geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

**作业 5. (习题 1.2.1)**

(2) 任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$, 则

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由定义知结论成立.

(4) 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 对任意 $n>N$,

$$\frac{n!}{n^n}=\frac{1\cdot 2\cdots n}{n\cdot n\cdots n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由定义知结论成立.

*注*. 学好数学分析, 既需抓住问题的主干, 又得会处理问题的细节. 既需懂得分析函数的大致走势, 又要会研究函数的局部性质. 要得到合适的量级, 要大胆放缩: 知道哪里是主要部分, 不要动, 把次要的部分放大或缩小, 不改变太多整体的大小就可以了, 比如

这里直接将三角函数大小放成 1, 以及直接把 $n!$ 大于 2 的项全放成 $n$, 因为我们有一个信念: 放缩完之后得到的东西还是比下面好很多. 如果太考虑细枝末节, 反而会考虑麻烦. 在后面, 我们要研究 $n!$ 更精细的渐近性态, 会得到以下结果 (Stirling 公式):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=1,$$

也可以写成

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\qquad \text{当 } n\to\infty,$$

这时就需要我们仔细分析 $n!$ 每一项的大小, 不能鲁莽.

**作业 6. (习题 1.2.2)** 由题意, 任给正数 $\varepsilon/M$, 存在 $N$, 使得当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<M\varepsilon/M=\varepsilon$, 由定义知结论成立.

**作业 7. (习题 1.2.3)** 由题意, 任意正数 $\varepsilon$, 存在 $N$, 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$, 也就是说, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

**作业 8. (习题 1.2.4)** 由绝对值不等式, $0\le||a_n|-|a||\le|a_n-a|$, 根据夹逼原理, 也有 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反例: $a_n=(-1)^n$. 但若 $a=0$, 实际上由极限定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N$, 使得任意 $n>N$, $||a_n||=|a_n|<\varepsilon$, 也就是说,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

**作业 9. (习题 1.2.6)**

对任意 $\varepsilon>0$, 由定义, 存在正整数 $N_1$, 使得任意 $n>N_1$, $|a_{2n}-a|<\varepsilon$, 存在正整数 $N_2$, 使得任意 $n>N_2$, $|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$. 于是, 我们取 $N=\max\{2N_1+2,2N_2+2\}$, 任意 $n>N$, 如果 $n$ 为奇数, 则 $(n-1)/2>N_2$, 于是 $|a_n-a|<\varepsilon$; 同样若 $n$ 为偶数也有 $|a_n-a|<\varepsilon$, 也就是说不管怎样, 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$, 由定义知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

**作业 10. (习题 1.2.7(1))** 注意对任意正整数 $n$, $|a_n-a_{n+1}|=\frac{n}{n+1}+\frac{n+1}{n+2}>1$, 与 Cauchy 收敛准则矛盾.

注. 证明数列不收敛大致方法: 1. 定义 2. 证明不满足 Cauchy 收敛准则 3. 找到两个收敛到不同极限的子列

**作业 11. (习题 1.2.8)**

(1) 注意

$$\lim_{n\to\infty} 4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}=4, \quad \lim_{n\to\infty} 3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}=3,$$

由极限除法运算,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{3}.$$

(4) 先化简 $a_n$.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{(2^2-1)(3^2-1)\cdots(n^2-1)}{2^2 3^2\cdots n^2}\\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)\cdot(n+1)}{2^2 3^2\cdots n^2}\\ &= \frac{n+1}{2n},\end{aligned}$$

于是其极限为 $\frac{1}{2}$.

**作业 12. (习题 1.2.13)** 问题一: 由极限定义, 取 $\varepsilon=(a-b)/2$, 则存在正整数 $N_1, N_2$, 使得对任意 $n>N_1$, $|a_n-a|<(a-b)/2$, 对任意 $n>N_2$, $|b_n-b|<(a-b)/2$. 那么从项 $\max\{N_1,N_2\}+1$ 开始, $a_n>a-(a-b)/2=b+(a-b)/2>b_n$.

问题二就是问题一的逆否 (改变一下 $a, b$ 的顺序), 从逻辑上说, 它们是等价的.

**作业 13. (习题 1.2.14)** 不妨 $a\geq b$. 当 $a>b$ 时, 由 13 题, 从某项开始, $a_n>b_n$, 故从某项开始, $c_n=a_n$, $d_n=b_n$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} c_n=a, \quad \lim_{n\to\infty} d_n=b.$$

当 $a=b$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N_1, N_2$, 使得对任意 $n>N_1$, $|a_n-a|<\varepsilon$, 对任意 $n>N_2$, $|b_n-a|<\varepsilon$, 所以当 $n>N:=\max\{N_1,N_2\}$ 时, $|c_n-a|<\varepsilon$, $|d_n-a|<\varepsilon$, 于是结论也成立.

**作业 14. (习题 1.2.15)**

(1) 注意

$$0<\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)<n\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0, \quad \text{as } n\to\infty,$$

由夹逼原理得极限为 0.

(2) 注意

$$0<(n+1)^k-n^k=n^k\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right]\leq n^k\cdot\frac{k}{n}=kn^{k-1}\to 0,$$

由夹逼原理得极限为 0.

(3) 注意

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{1-\frac{1}{2^n}}\to 2,\quad \text{as } n\to\infty.$$

(4) 注意当 $n\geq 2$ 时,

$$1\leq\sqrt[n]{n^2-n+2}\leq\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2\to 1,$$

由夹逼原理得极限为 1.

(5) 由

$$\sqrt[n]{\cos^2 1}\leq\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}<\sqrt[n]{n},$$

左右极限都是 1, 于是极限为 1.

**作业 15. (习题 1.2.16)** 不妨 $a_1=\max\{a_1,\cdots,a_m\}$. 由

$$a_1=\sqrt[n]{a_1^n}\leq\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}\leq\sqrt[n]{ma_1^n}=a_1\sqrt[n]{m}\to a_1,$$

结论成立.

# 补充

## 书写规范

改第一次作业时碰到不少书写问题. 通常以数学符号算式为核心, 适量辅以文字说明 (但尽量不要没有); 规范归纳法、反证法的书写格式; 尽量避免 ∵,∴ 符号, 数学论文更提倡用"因为/所以/因此/于是/从而/由此得/故""since/thus/hence/therefore"等文字衔接, 而不是符号缩写. 读者理解更顺畅. 请同学们多模仿教材上证明的书写过程, 慢慢地成为自己的习惯.

有时候, 适当拆除自己思路的脚手架, 反而能让过程更加清晰. 以用定义证明数列极限为例, 很多同学给定了 $\varepsilon>0$, 想写取 $N$ 的过程, 实际上可以把这些写在草稿纸 (熟练后可不写) 上, 在写正式解答的时候直接写出取得的 $N(\varepsilon)$ 值, 然后后面再进行放缩, 进行说理, 为什么取出来的 $N$ 是合理的. 我们具体举一个简单的例子.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

**书写反例 1:**

$$\forall\varepsilon>0,\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}<\varepsilon\Rightarrow n\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$$

所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$. 由极限定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$.

**书写反例 2:** 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 对任意 $n > N$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| < \varepsilon$, 由极限定义, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

**书写示例:** 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, 对任意 $n > N$,

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon,$$

由极限定义, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

**附 1: 数学归纳法的书写格式**

对于未熟练掌握此法者, 最好根据模版来写. 以下假设要证明一个关于 $n(n \ge 1)$ 的命题成立, 当然实际情况可能并不一定从 $n = 1$ 出发, 那就从不同的起点奠基即可. 这里仅介绍第一和第二数学归纳法, 螺旋、反向归纳法不作介绍, 感兴趣者可自己搜索.

第一数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 命题成立; 对 $n(n \ge 1)$, 假设命题成立; 下面考虑 $n + 1$ 的情形.

$\cdots$, 于是, 对 $n + 1$, 命题也成立, 由归纳法原理, 结论得证.

第二数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 命题成立; 对小于 $n(n \ge 2)$ 的情况, 假设命题成立; 下面考虑 $n$ 的情形.

$\cdots$, 于是, 对 $n + 1$, 命题也成立, 由归纳法原理, 结论得证.

实际上, 很多时候可以无脑用第二数学归纳法, 因为其包含了第一归纳法的假设.

**附 2: 一些记号**

常用 $\coloneqq$ 表示“被定义为”, 用来定义新的变量、函数等, 例如:

$$f(x) \coloneqq x^2 + 1, \qquad a_n \coloneqq \frac{1}{n^\alpha}.$$

记两个集合的*无交并*为 $\sqcup$: 主要用于强调两个集合没有交集, 例如

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \sqcup \mathbb{Q}^c,$$

如果是很多集合, 也可用

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$$

表示一族集合的无交并, 类似

$$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\qquad A=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

的记号也是合理的.

记有限或按指标集合的乘积为 $\prod$:

$$\prod_{k=1}^{n}a_k,\qquad \prod_{i\in I}x_i.$$

常约定空乘积等于 1:

$$\prod_{\emptyset}(\cdot)=1.$$

记集合 $\{1,2,\cdots,n\}\coloneqq[n]$, 尤其常用于组合学.

恒等 (对自变量域内处处相等) 常记为

$$f\equiv g,$$

当然这个符号也用来表达同余.

为表示数集, 如 $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$, 通常不用一般的字体, 而是采用黑板粗体表示, 否则比如在写极限定义证明题, 会出现如: $N\in N$ 这种混淆. 在纸笔书写中, 用"加一条短的平行竖线"来模拟黑板粗体, 如图 1.

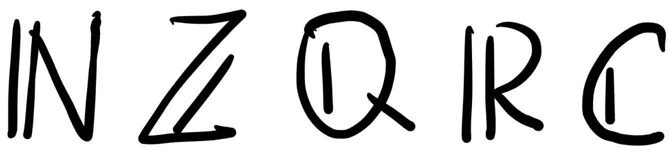


图 1: 常用数集符号的书写示意

## 补充题

**例 0.1** (e 的无理性)**.** 证明: e 是无理数.

*证明.* 上课已经指出

$$\mathrm{e}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\coloneqq\lim_{n\to\infty}a_n,$$

假设 $\mathrm{e}=\dfrac{p}{q}$, $p,q$ 是互质正整数, 上课已经指出 $2<\mathrm{e}<3$, 所以 $q\geq 2$. 则当 $n>q$,

$$\begin{aligned}
a_n-a_q &= \frac{1}{(q+1)!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\
&\leq \frac{1}{(q+1)!}\left(1+\frac{1}{q+2}+\cdots+\frac{1}{(q+2)^{n-q-1}}\right)\\
&< \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{1-1/(q+2)}\\
&= \frac{q+2}{(q+1)!(q+1)}\\
&< \frac{1}{q!q}(\text{用到}q(q+2)<(q+1)^2),
\end{aligned}$$

又 $\mathrm{e}=p/q$, 得 $q!\mathrm{e}-q!a_q$ 都是整数, 于是 $q!\mathrm{e}-q!a_q\geq 1$, 由

$$q!\mathrm{e}-q!a_q=\lim_{n\to\infty}q!(a_n-a_q)\leq \lim_{n\to\infty}q!\cdot\frac{1}{q!q}\leq\frac{1}{2},$$

矛盾. □

注. 这个例题告诉我们 e 是无理数, 实际上, $\pi$ 也是无理数. 判定一个数的无理性是比较困难的, 有同学在作业中由于 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$ 是无理数, 就认为它们的和一定是无理数, 但这不一定对, 比如 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})$ 就是有理数. 另外, 人们到现在还不知道 $\mathrm{e}+\pi$ 是不是无理数.

**例 0.2** (压缩映射定理)**.** 设函数 $f:\ [a,b]\to[a,b]$, 且存在常数 $L\in(0,1)$ 使对任意 $x,y\in[a,b]$ 都有

$$|f(x)-f(y)|\leq L\,|x-y|,$$

(该条件称为 Lipschitz 条件), 则 $f$ 有且仅有一个不动点 $x^*\in[a,b]$, 即 $f(x^*)=x^*$.

证明. **存在性.** 任取 $x_0\in[a,b]$, 令 $x_{n+1}=f(x_n)$. 由 $f([a,b])\subset[a,b]$, 得 $\{x_n\}\subset[a,b]$, 于是定义良好, 接下来我们证明: $\{x_n\}$ 极限存在, 只需证明它是 Cauchy 列. 注意到

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leq L|x_n-x_{n-1}|\leq\cdots\leq L^n|x_1-x_0|$$

因此对 $m>n$,

$$|x_m-x_n|\leq\sum_{k=n}^{m-1}|x_{k+1}-x_k|\leq|x_1-x_0|\sum_{k=n}^{\infty}L^k=\frac{L^n}{1-L}\,|x_1-x_0|\leq\frac{b-a}{1-L}L^n.$$

对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{1,\left[\log_L\frac{(1-L)\varepsilon}{b-a}\right]+1\}$, 则任意 $m,n>N$, $|x_m-x_n|<\varepsilon$, 即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列, 于是收敛. 记极限为 $x^*$, 下证 $f(x^*)=x^*$. 由 Lipschitz 条件, $f$ 连

续 (留给同学们), 于是

$$f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

**唯一性.** 反证法. 假设存在 $x^* \neq x^{**}$ 都是不动点, 则

$$|f(x^*) - f(x^{**})| = |x^* - x^{**}|,$$

矛盾, 综上, 不动点唯一. □

**例 0.3.** 设数列 $\{x_n\}$ 收敛, 证明: 它有单调子列.

*证明.* 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 若存在无穷多项 $x_n = x_0$, 结论已成立; 否则由抽屉原理, 集合 $A \coloneqq \{n : x_n > x_0\}$, $B \coloneqq \{n : x_n < x_0\}$ 至少有一个有无穷多项, 不妨是 $A$. 先证明: 任意 $\varepsilon > 0$,

$$\#([x_0, x_0 + \varepsilon] \cap A) = \infty.$$

由题意, 若此结论不成立, 则存在 $N_1$, 使得任意 $n > N_1$, $n \in A$, $x_n > x_0 + \varepsilon$. 但由极限定义, 存在 $N$, 任意 $n > N$, $|x_n - x_0| < \varepsilon$, 所以 $A \subset [\max\{N, N_1\}]$, 必有限, 矛盾.

回原题, 递归取以下子列: $x_{k_1} \in A$ 任取, $x_{k_{n+1}} \in [x_0, \frac{x_{n_k}+x_0}{2}] \cap A$, 前面已证总可以这么取. □

## 介绍: 上下极限

好多同学在没证明极限的良定性时就直接写表达式 $\lim_{n\to\infty} x_n = \cdots$ 这种式子, 是不可以的. 为了解决极限不一定存在的问题, 我们可以用上下极限来规避极限不一定存在的问题. 它的出发点是来自 (老师似乎讲过的) 极限存在的这样一个等价命题 (子列判别法):

数列 $\{x_n\}$ 极限存在等价于其任意子列收敛到同一极限.

当然这个命题的使用通常是去证明某个极限不存在: 只需找到两个收敛到不同极限的子列. 那么我们现在思考: 如果我们记 $\overline{x}$ 为 $\{x_n\}$ 所有收敛子列或发散到无穷的极限的上确界, $\underline{x}$ 为为 $\{x_n\}$ 所有收敛子列或发散到无穷的极限的下确界, 根据确界存在原理, $\overline{x}$, $\underline{x}$ 一定存在, 所以, 极限存在就等价于 $\overline{x} = \underline{x}$, 这给了我们定义以下上下极限的灵感.

设实数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 给定. 记尾部上确界与下确界序列:

$$s_n \coloneqq \sup_{k\geq n} x_k, \qquad i_n \coloneqq \inf_{k\geq n} x_k.$$

**定义 0.4** (上下极限)**.** 称

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} x_k, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} i_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} x_k.$$

它们总存在于扩展实数 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. 记

$$\overline{x} := \varlimsup_{n\to\infty} x_n, \qquad \underline{x} := \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

**命题 0.5** (基本性质)**.** *对任意实数列 $(x_n)$, 有:*

- ***(a)*** *$(s_n)$ 单调不增且有下界, 因此 $\lim s_n$ 存在于 $\overline{\mathbb{R}}$. 同理 $(i_n)$ 单调不减且有上界, 因此 $\lim i_n$ 存在于 $\overline{\mathbb{R}}$.*
- ***(b)*** *总有 $\underline{x}\leq\overline{x}$.*
- ***(c)*** *$x_n$ 收敛当且仅当 $\underline{x}=\overline{x}=L$, 此时 $\lim x_n = L$.*
- ***(d)*** *若 $\overline{x}<+\infty$, 则对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $N$ 使得 $x_n\leq\overline{x}+\varepsilon$ 对所有 $n\geq N$ 成立. 若 $\underline{x}>-\infty$, 则对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $N$ 使得 $x_n\geq\underline{x}-\varepsilon$ 对所有 $n\geq N$ 成立.*

*证明.* (1) 由定义可见 $s_{n+1}=\sup_{k\geq n+1}x_k\leq\sup_{k\geq n}x_k=s_n$, 故单调不增. 下界由例如 $\inf_{k\geq 1}x_k$ 保证. $(i_n)$ 类似.
(2) 由 $i_n\leq s_n$ 对所有 $n$ 成立, 取极限得 $\underline{x}\leq\overline{x}$.
(3) 若 $x_n\to L$, 则 $s_n\downarrow L$ 与 $i_n\uparrow L$, 故上下极限同为 $L$. 反过来若 $\underline{x}=\overline{x}=L$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N_1,N_2$ 使 $i_n>L-\varepsilon$ 与 $s_n<L+\varepsilon$ 对 $n\geq N:=\max\{N_1,N_2\}$ 成立, 从而 $L-\varepsilon<x_n<L+\varepsilon$ 对 $n\geq N$ 成立, 即 $x_n\to L$.
(4) 由 $s_n\downarrow\overline{x}$ 得存在 $N$ 使 $s_n<\overline{x}+\varepsilon$, 于是对 $k\geq n$ 有 $x_k\leq s_n<\overline{x}+\varepsilon$. 另一端类似. $\square$

**定理 0.6** (用极限点刻画)**.** *设 $E$ 为 $(x_n)$ 的聚点集合, 即存在子列收敛到 $y$ 的所有极限 $y$. 则*

$$\overline{x}=\sup E, \qquad \underline{x}=\inf E.$$

*并且存在子列 $x_{n_j}\to\overline{x}$ 与子列 $x_{m_j}\to\underline{x}$.*

*注* (常用判定技巧). 当直接判断 $\lim x_n$ 困难时, 可先估计 $\varlimsup$ 与 $\varliminf$. 若能分别夹住到同一极限 $L$, 则得到收敛结论. 而且关键的一点是: 数列的极限不一定存在, 但是数列的上下极限必定存在.

**例 0.7.** 设 $x_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$. 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

说明: 偶数项 $1+\frac{1}{n}\downarrow 1$, 奇数项 $-1-\frac{1}{n}\uparrow -1$. 因此尾部上确界趋于 1, 尾部下确界趋于 $-1$.

**例 0.8** ($\sin n$ 的上下极限)**.** 设 $x_n=\sin n$. 则

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1, \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = -1.$$

说明: 因为 $1/(2\pi)$ 为无理数, 序列 $\{n \bmod 2\pi\}$ 在 $[0,2\pi)$ 稠密. 因此可取子列 $n_k\to\infty$ 使 $n_k\to\frac{\pi}{2}$ 与 $n_k\to\frac{3\pi}{2}$ (模 $2\pi$) 分别成立, 于是 $\sin n_k\to 1$ 与 $\sin n_k\to -1$. 结合极限点刻画定理得结论.

对于函数, 我们同样可定义上下极限:

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\sup_{0<|x-x_0|<\delta} f(x), \quad \varliminf_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\delta\to 0^+}\inf_{0<|x-x_0|<\delta} f(x),$$

且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=s \Leftrightarrow \varlimsup_{x\to x_0} f(x)=\varliminf_{x\to x_0} f(x)=s.$$

## 一些上课没有证明的命题

**命题 0.9.** 记

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha},$$

当 $0<\alpha\le 1$ 时, $\{a_n\}$ 发散到正无穷, 当 $\alpha>1$ 时, $\{a_n\}$ 收敛. 如果用无穷求和的记号, 也就是说,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\begin{cases}=\infty, & 0<\alpha\le 1,\\ <\infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

*证明.* 数列 $\{a_n\}$ 严格递增.

**发散情形** $0<\alpha\le 1$**.** 分组放缩. 由

$$a_{2^m}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\sum_{j=2}^{m}\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k^\alpha}\ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m}2^{j(1-\alpha)}\ge\frac{m+1}{2},$$

因而 $a_{2^m}\to\infty$, 由单调性得 $a_n\to\infty$.

**收敛情形** $\alpha>1$**.** 仍按同样的分组, 但此时用上界

$$\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k^\alpha}\le 2^{j-1}\cdot\frac{1}{(2^{j-1})^\alpha}=2^{-(j-1)(\alpha-1)}.$$

因而

$$\sum_{k=1}^{2^m}\frac{1}{k^\alpha}=1+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j}\frac{1}{k^\alpha}\le 1+\sum_{j=1}^{m}2^{-(j-1)(\alpha-1)}=1+\frac{1-2^{-m(\alpha-1)}}{1-2^{-\alpha+1}}<\frac{2-2^{-\alpha+1}}{1-2^{-\alpha+1}},$$

也就是对任意正整数 $m$, $a_m<a_{2^m}<\dfrac{2-2^{-\alpha+1}}{1-2^{-\alpha+1}}$, 由单调收敛定理得 $\{a_n\}$ 收敛. $\square$

注. Euler 得到了

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

**定理 0.10** ($\infty/\infty$ 型 Stolz 定理)**.** 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

这里 $A\in[-\infty,\infty]$.

证明. 无从下手时, 先用定义翻译条件. 当 $A\in\mathbb{R}$ 时, 由定义, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N$, 任意 $n>N$,

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon,$$

即

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n),$$

作累加, 得

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N+1})<a_n-a_{N+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N+1}),$$

当 $n$ 充分大时, $b_n>0$, 三式同除 $b_n$, 得

$$\frac{a_{N+1}-Ab_{N+1}}{b_n}-\varepsilon\left(1-\frac{b_{N+1}}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-A<\frac{a_{N+1}-Ab_{N+1}}{b_n}+\varepsilon\left(1-\frac{b_{N+1}}{b_n}\right).$$

注意到 $a_{N+1}$, $b_{N+1}$, 都是关于 $\varepsilon$ 的常数, 取 $n\to\infty$, 得

$$-\varepsilon\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A\le\varepsilon.$$

又注意到 $\varepsilon$ 的任意性, 得

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-A=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

当 $A=+\infty(-\infty$ 类似), 任意 $M>0$，存在 $N$ 使得对所有 $n\geq N$，

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>M.$$

因 $\{b_n\}$ 严格递增，$b_{n+1}-b_n>0$，于是

$$a_{n+1}-a_n>M\,(b_{n+1}-b_n).$$

将上式对 $k=N,\ldots,n-1$ 累加，得对一切 $n>N$，

$$a_n-a_N>M\,(b_n-b_N).$$

当 $n$ 充分大时有 $b_n>0$，两边同除以 $b_n$，得到

$$\frac{a_n}{b_n}>M\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)+\frac{a_N}{b_n}.$$

令 $n\to\infty$，由 $b_n\to\infty$ 可得

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\ \geq\ M.$$

由于 $M>0$ 任意，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty.$$

□

注. 这里我们使用了分析学极其常见的技巧: epsilon-room. 其精神是: 要证明 $A=B$, 只需证明对任意 $\varepsilon>0$, $A\geq B-\varepsilon$, $A<B+\varepsilon$. 也就是说, 分析学的所有等式都是不等式. 留出一个 $\varepsilon$ 的大小, 退一步海阔天空. 0/0 情形请同学们自己完成.

**定理 1.28-30**

**定理 0.11.** *若当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极限 $l$, 则:*

1° *极限是唯一的.*

2° *$f(x)$ 在 $x_0$ 的附近有界, 即存在正数 $M,\delta$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|\leq M$.*

3° *若 $a<l<b$, 则在 $x_0$ 的附近, 有 $a<f(x)<b$, 即存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $a<f(x)<b$.*

证明. 1° 假设同时有 $l_1\neq l_2$. 取 $\varepsilon=\frac{1}{3}|l_1-l_2|>0$. 由极限定义, 当 $x$ 充分靠近 $x_0$ 时, 同时有 $|f(x)-l_1|<\varepsilon$ 与 $|f(x)-l_2|<\varepsilon$, 则 $|l_1-l_2|\leq|l_1-f(x)|+|f(x)-l_2|<2\varepsilon=\frac{2}{3}|l_1-l_2|$,

矛盾.

$2^\circ$ 取 $\varepsilon=1$. 则存在 $\delta>0$ 使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-l|<1$. 于是 $|f(x)|\le|l|+1$. 取 $M=|l|+1$ 即得.

$3^\circ$ 令 $\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{b-l,\,l-a\}>0$. 若 $|f(x)-l|<\varepsilon$, 则 $l-\varepsilon>a$ 与 $l+\varepsilon<b$, 从而 $a<f(x)<b$. □

**定理 0.12.** *设当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别以 $l$ 与 $l'$ 为极限, 则:*

$1^\circ$ *若在 $x_0$ 的附近有 $f(x)>g(x)$, 则 $l\ge l'$.*

$2^\circ$ *若 $l>l'$, 则在 $x_0$ 的附近必有 $f(x)>g(x)$.*

$3^\circ$ *由 $1^\circ$ 与 $2^\circ$ 推出: 若在 $x_0$ 的附近有 $f(x)\ge 0$, 则 $l\ge 0$; 若 $l>0$, 则在 $x_0$ 的附近有 $f(x)>0$.*

*证明.* 设 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $h(x)\to l-l'$. (用到 1.30, 不过 1.30 不依赖于 1.29)

$1^\circ$ 若在 $x_0$ 的附近 $h(x)>0$, 而又假设 $l-l'<0$, 取 $\varepsilon=-(l-l')/2>0$, 则充分靠近 $x_0$ 时 $h(x)<(l-l')+\varepsilon=(l-l')/2<0$, 矛盾. 故 $l-l'\ge 0$, 即 $l\ge l'$.

$2^\circ$ 取 $\varepsilon=\frac{1}{3}(l-l')>0$. 充分靠近 $x_0$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$ 与 $|g(x)-l'|<\varepsilon$. 于是 $f(x)\ge l-\varepsilon>l'+\varepsilon\ge g(x)$, 从而 $f(x)>g(x)$.

$3^\circ$ 令 $g\equiv 0$ 即得. □

**定理 0.13.** *设当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有极限, 则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ne 0$ 时) 均有极限, 且*

$1^\circ$ $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

$2^\circ$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\Big(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Big)\Big(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Big)$*; 特别地, $\lim\limits_{x\to x_0}c\,f(x)=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, 其中 $c$ 为常数.*

$3^\circ$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$*, 其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ne 0$.*

*证明.* 设 $\lim f=l$, $\lim g=l'$.

$1^\circ$ 由三角不等式, $\big|[f(x)\pm g(x)]-(l\pm l')\big|\le|f(x)-l|+|g(x)-l'|$, 右端可同时小于任意给定 $\varepsilon>0$.

$2^\circ$ 先用定理 1.28 的 $2^\circ$ 得 $f,g$ 在 $x_0$ 的附近有界, 取界为 $|f(x)|\le|l|+1$, $|g(x)|\le|l'|+1$. 则

$$|f(x)g(x)-ll'|=|f(x)g(x)-lg(x)+lg(x)-ll'|\le|f(x)-l|\,|g(x)|+|l|\,|g(x)-l'|$$

$$\le(|l'|+1)\,|f(x)-l|+|l|\,|g(x)-l'|,$$

右端随 $x \to x_0$ 而趋于 0. 常数倍的情形取 $g \equiv c$ 即可.

$3°$ 先证 $g(x) \neq 0$ 在 $x_0$ 的附近成立并且 $1/g(x) \to 1/l'$. 由于 $l' \neq 0$, 取 $0 < \eta < |l'|$, 则充分靠近 $x_0$ 时 $|g(x) - l'| < \eta$, 从而 $|g(x)| \geq |l'| - \eta > \frac{1}{2}|l'|$. 于是

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{|g(x) - l'|}{|g(x)|\,|l'|} \leq \frac{2}{|l'|^2}\,|g(x) - l'| \to 0.$$

由 $f \cdot (1/g) \to l \cdot (1/l')$ 与 $2°$ 即得. □

注. 由此可见, 数列极限和函数极限的证明几乎是差不多的, 就是离散和连续版本的不同罢了. 从函数的极限的邻域定义可能会觉得还是有一些差别, 但我们还知道一个极限的等价定义 (Heine 判别法): 设 $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff$ 对任意数列 $\{x_n\} \subset D \setminus \{x_0\}$, 若 $x_n \to x_0$, 则 $f(x_n) \to a$. 这个定义可能就更能彰显数列与函数极限之联系. 后面, 当我们要证明一些积分不等式, 会发现很多积分不等式也就是离散不等式的推广, 证明方法也是几乎一致的. 有时如果连续的问题找不到思路, 可以试试想一想离散版本的问题应该怎么做, 再把方法推广到连续.